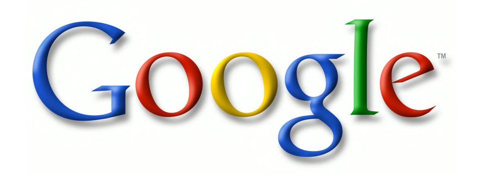



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909201 7













ABSTRAKTE GEOMETRIE

UNTERSUCHUNGEN
ÜBER DIE GRUNDLAGEN DER EUKLIDISCHEN
UND NICHT-EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

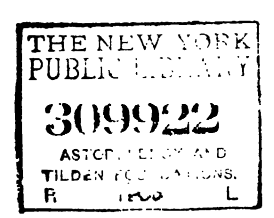
VON

KARL THEODOR VAHLEN

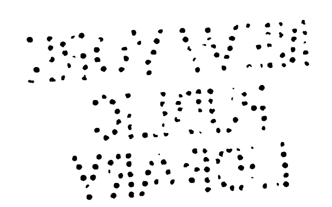
MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905



THE NEW YORK
PUBLIC
309922



DEN ERFORSCHERN DER ENTWICKLUNG
DER NICHT-EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

FRIEDRICH ENGEL

UND

PAUL STÄCKEL



Wir müssen in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unsers Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können. Gauß.

Vorwort.

Seitdem die Untersuchungen über den Parallelensatz zu der Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie durch Lobatschefsky und Johann Bolyai geführt haben, hat sich die Aufmerksamkeit der Geometer immer mehr den Grundlagen der Geometrie zugewandt. Wie beim Parallelensatz wurde nunmehr auch bei andern Grundsätzen die Frage nach ihrer Notwendigkeit oder Entbehrlichkeit, nach ihrer Abhängigkeit oder Unabhängigkeit voneinander aufgeworfen. So ging aus Riemanns Habilitationsschrift „über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", hervor, daß man auf den früher stillschweigend angenommenen Satz von der nicht-endlichen Länge der Geraden verzichten kann, wodurch man zu einer zweiten Nicht-Euklidischen Geometrie geführt wird. Derselben Kategorie von Resultaten ist von Staudts Begründung der projektiven Geometrie zuzurechnen, insofern aus ihr folgt, daß die projektiven Eigenschaften der geometrischen Figuren von Kongruenzsätzen unabhängig sind. In neuerer Zeit sind insbesondere durch die Arbeiten Hilberts viele die Grundlagen betreffende Fragen beantwortet und neue Fragen aufgeworfen worden. Unter anderem ergibt sich aus den Hilbertschen Untersuchungen „Über die Grundlagen der Geometrie", daß zum Beweise des projektiven Fundamentalsatzes nicht die volle Dedekindsche Stetigkeit, sondern nur die in ihr enthaltene Archimedische Meßbarkeit vorausgesetzt zu werden braucht. Daß auch die Annahme der Meßbarkeit noch mehr enthält, als für diesen Zweck notwendig ist, und daher durch einen weniger fordernden Grundsatz ersetzt werden darf, ist ein Hauptresultat des dritten Teiles des vorliegenden Buches.

Dieses Buch beabsichtigt die Geometrie in der Weise aufzubauen, daß bei jedem der nach und nach eingeführten Grundsätze die Unabhängigkeit von den vorhergehenden nachgewiesen wird, und falls

zwei gleichberechtigte Annahmen auftreten, beide verfolgt werden. Auf diese Weise ergibt sich von selbst die Gabelung der Geometrie in die Euklidische und Nicht-Euklidische, nachdem zuvor im zweiten und dritten Teile die hiervon unberührte projektive Geometrie begründet ist und die erforderlichen arithmetischen Hilfsmittel im ersten Teile behandelt worden sind. Hier werden die arithmetischen Grundsätze nach und nach eingeführt, in ihrer Abhängigkeit und Unabhängigkeit voneinander untersucht und verschiedene für die Geometrie wichtige Zahlensysteme betrachtet. Diese Zahlensysteme dienen später zur Konstruktion arithmetischer Geometrien, an denen die Unabhängigkeit bestimmter Sätze von anderndargetan wird; eine Methode, die nach dem Vorgange von Peano Hilbert mit großem Erfolge verwendet hat. Besondere Aufmerksamkeit wird ferner den Anordnungssätzen zugewendet, und neben der sonst nur behandelten linearen Anordnung werden auch die entsprechenden Sätze für planare und überplanare Anordnung aufgestellt. Auf Grund der Anordnung werden die Begriffe der Dichte, der Meßbarkeit und der Stetigkeit eingeführt, und zwar einer Stetigkeit, die erst mit der Meßbarkeit zusammen die Dedekindsche Stetigkeit repräsentiert, aber in vielen Fällen diese zu ersetzen geeignet ist.

Der zweite und dritte Teil sind der projektiven Geometrie gewidmet, und zwar der zweite Teil den nur auf das Verbinden und Schneiden bezüglichen sogenannten Schließungssätzen. Es stellt sich heraus, daß diese Sätze nicht aus den Verknüpfungssätzen allein gefolgert werden können, falls man nicht den projektiven Fundamentalsatz oder den Pascalschen Satz als Grundsatz hinzunimmt. Infolgedessen werden im dritten Teile die reinen Anordnungssätze und die Existentialsätze der Anordnung (Sätze der Meßbarkeit, Stetigkeit usw.) eingeführt, worauf sich die vollständige Begründung der projektiven Geometrie auf verschiedenen Wegen als möglich erweist.

Der vierte Teil behandelt die „affine" Geometrie, die sich von der projektiven durch Einführung der „uneigentlichen" Punkte unterscheidet, d. h. der Schnittpunkte je zweier sich nicht im Endlichen schneidenden Geraden einer Ebene. Hier steht neben der Euklidischen Annahme je eines uneigentlichen Punktes auf jeder Geraden als gleichberechtigt diejenige von Bolyai und Lobatschefsky, daß auf jeder Geraden deren mehrere liegen. Demgemäß zerfällt die affine Geometrie in eine Euklidische und eine Nicht-Euklidische. Während nun die Nicht-Euklidische affine Geometrie unter Annahme der Stetigkeit und der Existenz von Affinitäten vollständig, auch in ihrem metrischen Teile begründet werden kann, ist dies für die Euklidische Geometrie

nicht der Fall. Es wird daher von neuem, im fünften Teile, an die projektive Geometrie angeknüpft, indem keinerlei Voraussetzungen über uneigentliche Elemente gemacht, dagegen metrische oder Kongruenz-Axiome eingeführt werden. Nunmehr ergibt sich die Dreiteilung der Geometrie in die Euklidische und die beiden Nicht-Euklidischen; und zwar nach dem Verhalten der Winkelsumme im Dreieck zu zwei Rechten oder, was unter Voraussetzung der Meßbarkeit auf das Gleiche hinauskommt, nach der Anzahl der uneigentlichen Punkte auf einer Geraden. Die metrische Geometrie spaltet sich daher in die projektivisch-metrische Geometrie, in welcher uneigentliche Elemente nicht vorhanden sind, und in die beiden affin-metrischen Geometrien.

Das Ziel des Buches: vollständige und widerspruchlose Systeme von Grundsätzen für jede der drei möglichen Geometrien aufzustellen, wird durch den Nachweis erreicht, daß auf Grund der aufgestellten Sätze Koordinaten eingeführt werden können.

Als Anhang wird noch die Theorie der Flächeninhalte von Polygonen und der Rauminhalte von Polyedern ohne Voraussetzung der Stetigkeit oder der Meßbarkeit behandelt.

Greifswald, Januar 1905.

Vahlen.

Inhalt.

III. Projektive Geometrie. Zweite Hälfte.

Die Anordnungssätze.

1) Die reinen Anordnungssätze.

2) Die Existentialsätze der Anordnung.

IV. Affine Geometrie.

Euklidische affine Geometrie.

Nicht-Euklidische affine Geometrie.

V. Metrische Geometrie.

Bezeichnungen.

Zahlen: $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots,$

Gleich: $=$

Ungleich: $\neq$

Größer: $>$

Kleiner: $<$

Punkte: $A, B, \ldots, (\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (\mathfrak{A}\mathsf{A}), (\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma), \ldots$

Gerade: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, [AB], [\mathsf{A}\mathsf{B}], \ldots,$

Ebenen: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots, \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}, \{\mathfrak{A}A\}, \{ABC\}, \ldots,$

Raum: $|ABCD|, |\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma\Delta|, |A\mathsf{A}|, \ldots,$

Halbgerade: $[AB, \ldots$

Halbebene: $\{A\mathfrak{B}, \ldots$

Halbraum: $|A\mathsf{B}, \ldots$

Winkel: $\angle, ABC, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathsf{A}, \mathsf{A}\mathsf{B}, \alpha, \beta, \ldots$

Parallel: $\parallel$

Senkrecht: $\perp$

Strecken: $AB, a, b, \ldots$

Einleitung.

Jeder Begriff ist entweder zu erklären, d. h. auf Grundbegriffe zurückzuführen, oder, wenn das unmöglich ist, als Grundbegriff hinzustellen.

Jeder Satz ist entweder zu beweisen, d. h. aus Grundsätzen herzuleiten, oder, wenn das unmöglich ist, als Grundsatz hinzustellen.

Die Unmöglichkeit, einen Begriff auf Grundbegriffe, einen Satz auf Grundsätze zurückzuführen, ist in jedem einzelnen Falle zu beweisen, sofern sie nicht schon begrifflich klar ist.

Die Aufgabe: alle Sätze und Begriffe einer deduktiven Wissenschaft auf Grundsätze und Grundbegriffe zurückzuführen, ist z. T. willkürlich, also nicht eindeutig, sondern durch mehrere Systeme von Grundsätzen und -begriffen lösbar. Grundsatz und Grundbegriff haben daher nur relative Bedeutung.

Die Aufgabe: die Grundlagen (d. h. ein System von Grundsätzen und -begriffen) der Geometrie aufzustellen, soll im folgenden zu einer bestimmteren gemacht werden durch die Forderung, daß die Anzahl der einzuführenden Grundbegriffe und der Inhalt jedes einzelnen Grundbegriffes und Grundsatzes möglichst klein sei.*) Dadurch wird eine möglichst vollständige Auseinanderlegung der Grundlagen in ihre Elementarbestandteile bewirkt.

Die Ermittelung der Grundlagen ist zunächst eine Aufgabe induktiver Natur. Aus dem empirischen Rohmaterial an Sätzen und

---

*) Dagegen sind z. B. Lie (vgl. Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3, Leipzig 1893, Abteilung 5) und Hölder (vgl. O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1900, p. 8) der Ansicht, die Grundsätze seien auf eine möglichst kleine Zahl zu reduzieren. Ebenso Poincaré (vgl. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig 1904, p. 48). Bei Graßmann (vgl. H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Werke hrsg. von F. Engel, Leipzig 1894, Bd. I 1 S. 67) und Veronese (vgl. G. Veronese, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894, S. XIII, XVII) findet sich meine Ansicht, soweit sie sich auf die Grundsätze bezieht.

Begriffen werden diejenigen ausgewählt, die zur Grundlage dienen sollen. Der Nachweis der Zulässigkeit der getroffenen Auswahl ist rein deduktiv und fordert dreierlei: erstens den Nachweis der Widerspruchslosigkeit, zweitens den der Unabhängigkeit*) der aufgestellten Grundsätze und -begriffe untereinander, drittens den Nachweis der Vollständigkeit des aufgestellten Systems, d. h. den Nachweis, daß es keine andern richtigen Sätze der Geometrie gibt, als solche, die aus dem aufgestellten System von Grundsätzen gefolgert werden können. Bei dieser deduktiven Prüfung der Grundlagen erscheinen die geometrischen Begriffe: Punkt, Gerade usw. ihres konkreten Anschauungsinhaltes entkleidet und es darf mit ihnen lediglich auf Grund der für sie aufgestellten Erklärungen und Grundsätze, also abstrakt**) operiert werden. Auf das Hilfsmittel gezeichneter Figuren braucht darum nicht verzichtet zu werden, nur muß man sich stets vergegenwärtigen, daß die gezeichnete Figur nicht in allen, sondern nur in den verabredeten Eigenschaften ein Repräsentant der gedachten Figur ist, so daß in der Deduktion nur von diesen Gebrauch gemacht werden darf. Übrigens ist hiermit zugleich der Grund angegeben, warum ein an einer speziellen Figur geführter Beweis allgemein gilt: man macht keinen Gebrauch von den besonderen Eigenschaften der Figur, sondern nur von denen, auf die sich der zu beweisende Satz bezieht, die also auch allen demselben Satz genügenden Figuren zukommen. Man braucht daher zur Erklärung jener Tatsache nicht, wie einige Philosophen wollen, zu der unhaltbaren Vorstellung der Figuren als beweglicher seine Zuflucht zu nehmen, oder wie andere, einen Analogieschluß darin zu sehen.***)

Die Grundsätze sind von verschiedener Art. Der Satz: Durch zwei verschiedene Punkte wird eine Gerade eindeutig bestimmt, scheint derart unlöslich mit dem Begriff der Geraden verbunden, daß es naturgemäß ist, die Erklärung der Geraden so abzufassen, daß dieser Satz darin enthalten ist. Sätze dieser Art, d. h. Sätze, denen eine unmittelbare anschauliche Gewißheit zuzukommen scheint, heißen Axiome. Von andrer Art ist z. B. der Archimedische Satz der Meßbarkeit: Durch hin-

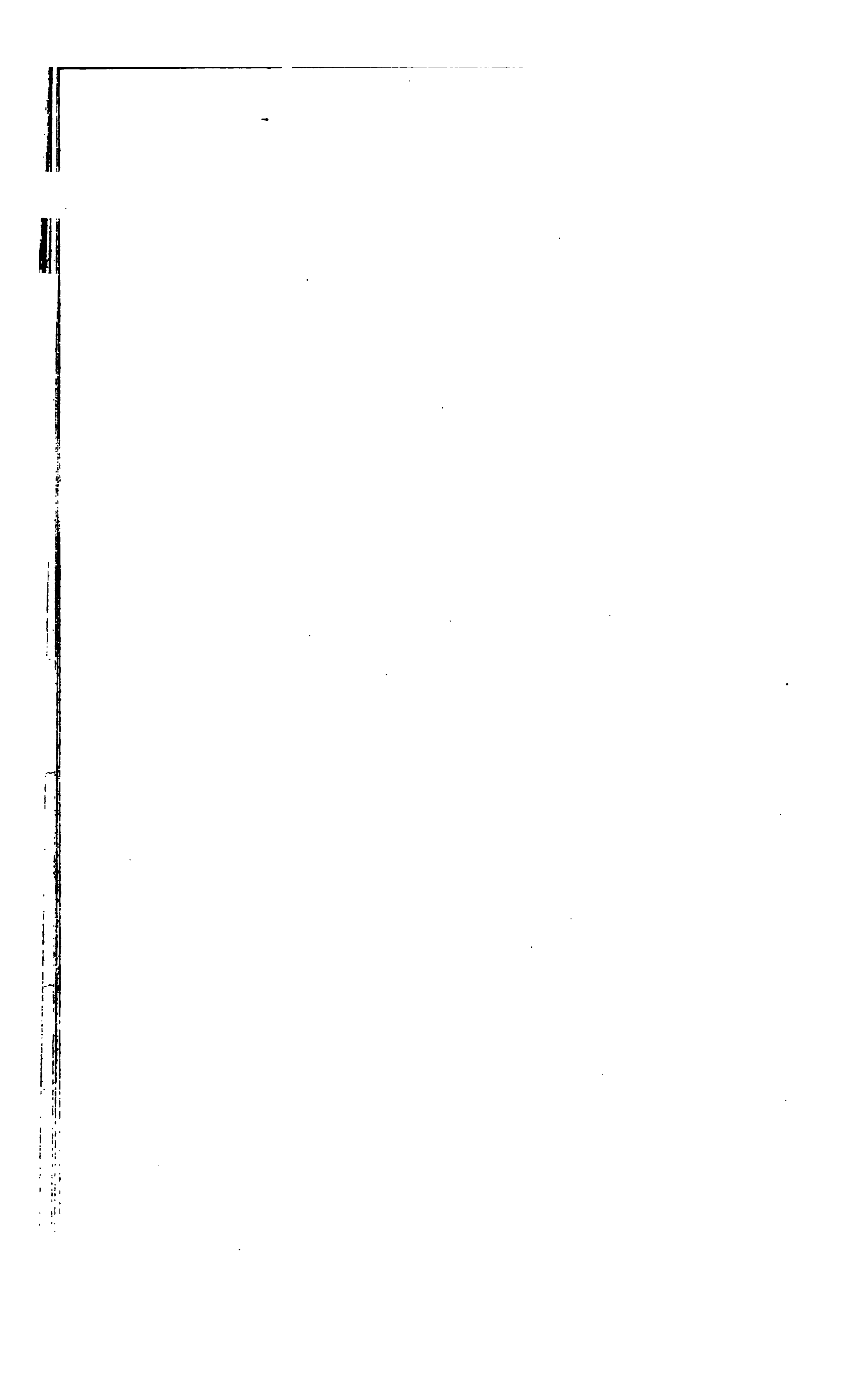
*) Im allgemeinen werden wir nur die Unabhängigkeit jedes Grundsatzes von den vorhergehenden beweisen, da im übrigen meist schon begriffliche Unabhängigkeiten bestehen.

**) Vgl. z. B. O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie, Leipzig 1900, p. 14. Veronese l. c. p. XVI, VI, p. XVII Z. 11—14. Cayley, The abstract geometrie. Phil. Trans. Lond. 1870. Gegen eine abstrakte Geometrie wendet sich z. B. F. Klein, Math. Ann. 37 (1890) p. 571.

***) Vgl. O. Hölder, l. c. p. 12. Kroman, Unsere Naturerkenntnis, deutsch von Fischer-Benzon 1883, S. 74—79. Sigwart, Logik Bd. 2 S. 226.

reichend häufiges Abtragen einer Strecke auf einer Geraden kommt man über jeden Punkt hinaus. Dieser Satz kann eine anschauliche Gewißheit nicht für sich in Anspruch nehmen; er ist vielmehr lediglich als die Forderung aufzufassen, daß nur Punkte in Betracht gezogen werden sollen, für welche dieser Satz besteht. Sätze dieser Art, d. h. Sätze, denen nichts Zwingendes und Unvermeidliches innewohnt, heißen Postulate. Von der Art ist z. B. noch der Satz von der Stetigkeit und das Euklidische Postulat von den Parallelen. Daraus ergibt sich die doppelte Notwendigkeit, einerseits die Grundlagen möglichst weit von jedem Postulat unabhängig aufzubauen, andrerseits auch neben jedem Postulat noch die entgegengesetzten Annahmen zu verfolgen, also nicht-meßbare (nicht-Archimedische), nicht-stetige, nicht-Euklidische Geometrieen zu betrachten.

Die Begriffe der Meßbarkeit und der Stetigkeit sind wesentlich arithmetischer Natur; einige der wichtigsten geometrischen Fragen werden durch Zurückführung auf arithmetische ihre Lösung finden; die Arithmetik wird Beispiele von Geometrieen liefern, die von den empirisch gegebenen in bestimmten Grundsätzen unterschieden sind, woraus die Unabhängigkeit dieser Grundsätze von den übrigen folgt. Dieses sind einige der Gründe, die eine genauere Erörterung der Grundlagen der Arithmetik erforderlich machten. Auch hier waren mir die oben erwähnten Gesichtspunkte maßgebend. Jedoch habe ich die Untersuchung stets nur so weit geführt, als es für ihren geometrischen Zweck erforderlich war.



I.

Die Grundlagen der Arithmetik.

Mengen.

1. Grundbegriffe sind erstens das „Ding“, zweitens die „Menge“*), drittens die „Zugehörigkeit“ eines Dinges zu einer Menge oder einer Menge zu einem Dinge.

2. Eine Menge wird „bestimmt“ durch Angabe der ihr zugehörigen Dinge; ein Ding wird „bestimmt“ durch Angabe der ihm zugehörigen Mengen.

3. Jede Menge ist ein Ding; jedes Ding ist eine Menge, nämlich die Menge der dem Ding zugehörigen Mengen.

4. Ist also a ein Ding der Menge b, so ist b ein Ding der Menge a. Denn besteht die Menge b aus den Dingen $a, a', a'', \ldots$, so ist sie unter allen dem Ding a zugehörigen Mengen, d. h. den Dingen der Menge a, enthalten. (Von diesem Satze wird jedoch nicht Gebrauch gemacht.)

5. Definition: Eine Menge α heißt „Teilmenge“*) einer Menge a, wenn jedes Ding der Menge α ein Ding der Menge a ist, und α heißt „eigentliche“ Teilmenge der Menge a, wenn außerdem nicht jedes Ding der Menge a ein Ding der Menge α ist.

6. Satz: Ist a eine Teilmenge von b, b eine Teilmenge von c, so ist a eine Teilmenge von c.

Beweis: Jedes Ding der Menge a ist ein Ding der Menge b, jedes Ding der Menge b ein Ding der Menge c, also usw.

7. Definition: Zwei Dinge a und b heißen „gleich“ ($a = b$, $b = a$), wenn a eine Teilmenge von b und b eine Teilmenge von a ist, sonst „ungleich“ oder „verschieden“ ($a \neq b$, $b \neq a$).

8. Satz: Zwischen den drei Paaren von Dingen (a, b), (b, c), (c, a), die man aus drei Dingen a, b, c bilden kann, können nicht zwei Gleichheiten und eine Ungleichheit bestehen, oder: Sind zwei Dinge einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis: Ist z. B. $a = b$, $b = c$, so ist (7) a eine Teilmenge von b, b eine Teilmenge von c, also (6) a eine Teilmenge von c. Ebenso ist c eine Teilmenge von b, b eine Teilmenge von a, also c eine Teilmenge von a. Also (7) $a = c$.

---

*) s. G. Cantor, Zeitschr. f. Philos. 91 (1887) S. 92 u. 95, S. 240.

sind a vor b zwei Dinge der Menge, so existieren Dinge x, die den Ordnungsbeziehungen a vor x vor b genügen.

20. Definition: Eine aus mindestens vier verschiedenen Dingen bestehende Menge heißt „planar geordnet", wenn erstens durch je zwei verschiedene Dinge, z. B. b, c, von ihr eine diese enthaltende linear geordnete Teilmenge $(b, c) \neq (c, b)$*) der Menge eindeutig bestimmt wird, und wenn zweitens zwischen jeder Teilmenge (b, c) und jedem ihr nicht zugehörigen Dinge a eine und nur eine der beiden Ordnungsbeziehungen:

a „rechts" (b, c) oder a „links" (b, c)

und für diese der Grundsatz 21 besteht.

21. Grundsatz: Aus x rechts (a, b), nicht links**) (b, c), nicht links (c, a) folgt: a rechts (b, c), b rechts (c, a), c rechts (a, b). Ebenso bei Vertauschung von „rechts" mit „links".

22. Satz: Aus a rechts (b, c) folgt a links (c, b) und b rechts (a, c), c rechts (a, b).

Beweis: Sei $(b, c) = (d, c) = (d, b)$, $d \neq b \neq c$; a rechts (b, c), nicht links (c, d), nicht links (d, b) gäbe (21): d rechts (b, c), gegen 20. Ferner folgt aus 21 für $x = c$ (z. B.): Aus c rechts (a, b) folgt a rechts (b, c), b rechts (c, a).

23. Definition: Ist a rechts (b, c) und x nicht links (b, c), nicht links (c, a), nicht links (a, b), so heißt x „zwischen" (a, b, c) oder zwischen (a, c, b); und zwar „uneigentlich", wenn x zur Teilmenge (a, b) oder (b, c) oder (c, a) gehört, sonst „eigentlich".

Folgerungen: 1) Aus x zwischen (a, b, c), d nicht auf (a, x), zwischen (b, c) folgt entweder x zwischen (a, b, d), oder zwischen (a, d, c). Dies ist evident für x auf (a, b) oder (c, a) oder (b, c) (12 Folgerung 1). Also sei z. B. x rechts (a, b), (b, c), (c, a), rechts (a, d), dann ist x rechts (a, d), rechts $(d, c) = (b, c)$, rechts (c, a). Ist aber x links (a, d), dann ist x rechts (a, b), rechts $(b, d) = (b, c)$, rechts (d, a).

2) Aus a rechts (x, y), b nicht links (x, y), c eigentlich zwischen (a, b) folgt c rechts (x, y). Denn ist im speziellen Fall b auf (x, y), und erstens $(x, b) = (x, y)$, so folgt aus a rechts (xy), a rechts (xb), x links $(ab) = (cb)$, c rechts $(xb) = (xy)$. Ist zweitens $(xb) = (yx)$,

*) d. h. die Teilmengen (b, c), (c, b) bestehen zwar aus denselben Dingen, sollen aber als dem „Sinne" nach verschieden angesehen werden. Zwei Teilmengen (b, c), (b_1, c_1) sind daher identisch, wenn erstens b_1, c_1 Dinge von (b, c) sind und zweitens mit b vor (nach) c zugleich b_1 vor (nach) c_1 ist.

**) d. h. „rechts" oder „auf" (= zugehörig zu).

so folgt aus a rechts (xy), a links (xb), x rechts $(ab) = (cb)$, c links $(xb) = (yx)$, c rechts (x, y). — Im allgemeinen Fall folgt aus a rechts (xy), b rechts (xy), daß y nicht zwischen (x, a, b), also nicht zwischen (x, a, c) oder (x, c, b) liegt. Demnach kann weder mit y links $(ab) = (ac)$, noch mit y nicht rechts $(ba) = (bc)$ zusammen y nicht links (xc) sein, da sonst im ersten Fall y zwischen (xac), im zweiten y zwischen (xcb) wäre.

24. Satz: Sind a, b, c, d vier Dinge einer planar geordneten Menge, deren keine drei einer linear geordneten Teilmenge angehören, so liegt von den vier Dingen entweder eins oder keins zwischen den drei andern.

Beweis: Ist z. B. d zwischen (a, b, c), also

$$d \text{ rechts } (a, b), \quad \text{rechts } (b, c), \quad \text{rechts } (c, a),$$

so folgt (nach 21)

$$a \text{ rechts } (b, c), \quad \text{links } (c, d), \quad \text{links } (d, b),$$

also a nicht zwischen (b, c, d); ebenso b nicht zwischen (c, d, a), c nicht zwischen (d, a, b).

Ist							
	a rechts	(b, c),	rechts	(c, d),	rechts	(b, d),
	b „	(c, d),	„	(d, a),	„	(c, a),
	c „	(d, a),	„	(a, b),	„	(d, b),
	d „	(a, b),	„	(b, c),	„	(a, c),

was nach 21 möglich ist, so ist keins der vier Dinge zwischen den drei andern.

25. Satz: Eine aus mindestens vier, nicht einer linear geordneten Teilmenge angehörenden Dingen bestehende Teilmenge einer planar geordneten Menge ist eine planar geordnete Menge.

Beweis wie zu 14.

26. Definition: Eine Menge heißt „sphärisch geordnet", wenn aus ihr durch Vielfachzählung eines Dinges a, als $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, \ldots$, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Dinge eine linear geordnete Menge bilden, eine planar geordnete Menge entsteht, in der für jedes Ding b stets

$$b \text{ rechts } (a_\alpha, a_\beta), \quad \text{wenn } \alpha \text{ vor } \beta.$$

27. Definition: Eine planar geordnete Menge heißt „dicht", wenn zwischen je dreien, nicht einer linear geordneten Teilmenge angehörenden Dingen der Menge ein Ding der Menge liegt.

28. Definition: Eine Teilmenge m einer planar geordneten Menge heißt „relativ dicht", wenn zwischen je drei, nicht einer linear

geordneten Teilmenge angehörenden Dingen der Menge ein Ding der Teilmenge m liegt.

Folgerungen: 1) Eine relativ dichte Teilmenge ist (absolut) dicht, aber im allgemeinen nicht umgekehrt.

2) Eine relativ dichte Teilmenge einer planar geordneten Menge besteht aus mindestens vier nicht einer linear geordneten Teilmenge angehörenden Dingen, ist also (25) planar geordnet. Denn ist die Teilmenge uneigentlich, so ist der Satz evident, ist sie eigentlich und (z. B.) a rechts (b, c), so existieren Dinge α, β, γ, δ der Teilmenge, so daß δ zwischen (a, b, c), α zwischen (b, c, δ), β zwischen (α, c, δ), γ zwischen (α, b, δ) liegt. Dann liegt β links (α, δ) und γ liegt rechts (α, δ), so daß α, β, γ, δ keiner linear geordneten Teilmenge angehören.

29. Satz: In einer planar geordneten dichten Menge wird jedes Ding durch seine Ordnungsbeziehungen zu je zwei, mit ihm nicht einer linear geordneten Teilmenge angehörenden Dingen einer relativ dichten Teilmenge eindeutig bestimmt.

Beweis: Sind $a \neq b$ zwei Dinge der Menge, so gibt es ein Ding x der relativ dichten Teilmenge, so daß a, b, x nicht einer linear geordneten Menge angehören; denn sonst wäre, entgegen 28 Folgerung 2 die relativ dichte Teilmenge linear geordnet. Dann gibt es ein Ding y der relativ dichten Teilmenge, welches zwischen a, b, x liegt; also ist y rechts (b, x), rechts (x, a), also b rechts (x, y), a links (x, y). D. h. a und b haben mindestens zu dem Paar (x, y) der relativ dichten Teilmenge nicht dieselbe Ordnungsbeziehung.

30. Definition: Eine planar geordnete Menge heißt „stetig“, wenn jedem mit 21 verträglichen System von Ordnungsbeziehungen eines Dinges x zu den Dingen einer Teilmenge wenigstens ein Ding der Menge entspricht.

Folgerung: Eine planar geordnete stetige Menge ist dicht, denn ist (z. B.) a rechts (b, c), und sind a, b, c Dinge einer planar geordneten stetigen Menge, so existieren Dinge x, die den Ordnungsbeziehungen genügen:

$$x \text{ rechts } (b, c), \text{ rechts } (c, a), \text{ rechts } (a, b), \text{ d. h. } x \text{ zwischen } (a, b, c).$$

31. Definition: Eine aus mindestens fünf verschiedenen Dingen bestehende Menge heißt „überplanar*) geordnet“, wenn erstens durch

*) Es wird hier nur die niedrigste überplanare Anordnung betrachtet, weil zunächst nur diese geometrisch in Betracht kommt, und weil schon hier die allgemeinen Gesetze deutlich hervortreten.

je zwei verschiedene Dinge der Menge eine dieselben enthaltende linear geordnete Teilmenge, zweitens durch je drei, nicht einer linear geordneten Teilmenge angehörende Dinge b, c, d der Menge eine dieselben enthaltende planar geordnete Teilmenge $(b, c, d) \neq (b, d, c)$*) eindeutig bestimmt wird, und wenn drittens zwischen jeder planaren Teilmenge (b, c, d) und jedem ihr nicht angehörenden Ding a der Menge eine und nur eine der beiden Ordnungsbeziehungen:

$$a \text{ „über“ } (b, c, d) \quad \text{oder} \quad a \text{ „unter“ } (b, c, d)$$

und für diese der Grundsatz (32) besteht:

32. Grundsatz: Aus x über (a, b, c), nicht über (b, c, d), nicht unter (c, d, a), nicht über (d, a, b) folgt:

$$a \text{ unter } (b, c, d),\ b \text{ über } (c, d, a),\ c \text{ unter } (d, a, b),\ d \text{ über } (a, b, c).$$

Ebenso bei Vertauschung von „unter“ mit „über“.

33. Satz: Aus a unter (b, c, d) folgt a unter (c, d, b), b über (c, d, a), a über (d, c, b); ebenso bei Vertauschung von „unter“ und „über“.

Beweis: Sei $(bcd) = (cde) = (deb) = (ebc)$ (s. 24); wäre a unter (b, c, d) nicht unter (c, d, e), nicht über (d, e, b) nicht unter (e, b, c), dann wäre (32): e unter (b, c, d) gegen 31.

Aus 32 folgt für $x = d$ (z. B.), daß aus

$$d \text{ über } (a, b, c) \text{ folgt } a \text{ unter } (b, c, d),\ b \text{ über } (c, d, a),\ c \text{ unter } (d, a, b).$$

Demnach folgt aus a unter (b, c, d) der Reihe nach:

$$b \text{ über } (c, d, a), \text{ über } (d, a, c),\ d \text{ unter } (a, c, b),$$
$$a \text{ über } (c, b, d), \text{ über } (d, c, b).$$

34. Definition: Ist d über (a, b, c), x nicht unter (a, b, c), nicht über (b, c, d), nicht unter (c, d, a), nicht über (d, a, b), so heißt x „zwischen“ a, b, c, d oder zwischen a, b, d, c; und zwar „uneigentlich“, wenn x auf (a, b, c), oder (b, c, d), oder (c, d, a), oder (d, a, b), sonst „eigentlich“.

Folgerungen: 1) Ist x zwischen a, b, c, d und e (nicht auf (a, b, x)) zwischen c, d, so ist entweder x zwischen a, b, c, e oder zwischen a, b, e, d. Dies ist evident, wenn x uneigentlich zwischen a, b, c, d, mit Rücksicht auf 23 Folg. 1. Sei also z. B. x unter (a, b, c), über (b, c, d), unter (c, d, a), über (d, a, b) und erstens x unter (a, b, e), so folgt: x unter (a, b, e), über $(b, e, d) = (b, c, d)$, unter $(e, d, a) = (c, d, a)$,

*) Vgl. Anmerkung *) zu 20.

über (d, a, b), d. h. x zwischen a, b, e, d: sei zweitens x über (a, b, e), so folgt x über (a, b, e), unter $(b, e, c) = (b, d, c)$, über $(e, c, a) = (d, c, a)$, unter (d, a, b), d. h. x zwischen (a, b, e, c).

2) Aus a über (x, y, z), b nicht unter (x, y, z), c zwischen (a, b), folgt c über (x, y, z). Denn ist im speziellen Falle b auf (x, y, z) und erstens $(x, y, z) = (x, b, z)$, so folgt aus a über $(x, y, z) = (x, b, y)$, x unter $(a, b, z) = (c, b, z)$, also c über $(x, b, z) = (x, y, z)$; ist zweitens $(x, y, z) = (x, z, b)$, so folgt a über $(x, y, z) = (x, z, b)$, x über $(a, z, b) = (c, z, b)$, c unter $(x, z, b) = (x, y, z)$; ist drittens b auf (x, z), nicht auf (x, y), so ist entweder $(x, y, z) = (x, b, y)$ oder $= (x, y, b)$ usw.; ist viertens b auf (x, y) und (x, z), also, da $(x, y) \neq (x, z)$, $b = x$, so folgt aus a über (x, y, z), x über $(a, y, z) = (c, x, y)$, c über (x, y, z). Im allgemeinen Falle folgt aus a über (x, y, z), b über (x, y, z), daß (z. B.) z nicht zwischen a, b, x, y, also nicht zwischen a, c, x, y, oder c, b, x, y. Nun findet in jedem der acht möglichen Fälle:

b nicht über (unter) (a, x, y), nicht über (unter) (a, x, z), nicht über (unter) (a, z, y) wenigstens jedesmal einer der durch Vertauschung von x, y, z aus

z nicht über (a, b, x), nicht unter (a, b, y) hervorgehenden sechs Fälle statt, und es folgt (z. B.)

z nicht über $(y, b, a) = (y, c, a)$, nicht unter $(b, a, x) = (c, a, x)$, unter (a, x, y), also z unter (x, y, c), da sonst z zwischen (y, c, a, x) folgen würde.

35. Satz: Sind a, b, c, d, e fünf Dinge einer überplanar geordneten Menge, deren keine vier einer planar geordneten Teilmenge angehören, so liegt entweder eins oder keins der fünf Dinge zwischen den vier andern.

Beweis: Ist z. B.

a über bcd, bde, bec, cde,
b „ dca, eda, cea, edc,
c „ abd, aeb, aed, bde,
d „ acb, abe, ace, bec,
e „ adb, abc, adc, bcd,

so ist keins der fünf Dinge zwischen den vier andern. Ist aber z. B. c zwischen abe, also:

e über abc, bdc, cda, dba,

so folgt:

a über bec, bdc, ced, deb, usw.

also keins außer c zwischen den vier andern.

36. Satz: Eine aus mindestens fünf, nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörenden Dingen bestehende Teilmenge einer überplanar geordneten Menge ist eine überplanar geordnete Menge.

Beweis wie zu 14 und 25.

37. Definition: Eine Menge heißt „übersphärisch geordnet“, wenn aus ihr durch Vielfachzählung eines Dinges a als a_α, a_β, a_γ, ..., wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine planar geordnete Menge bilden, eine überplanar geordnete Menge entsteht, in welcher für ein Ding b stets:

$$b \text{ über } (a_\alpha, a_\beta, a_\gamma), \text{ wenn } \alpha \text{ rechts } (\beta\gamma).$$

38. Definition: Eine überplanar geordnete Menge heißt „dicht“, wenn zwischen je vier, nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörenden Dingen der Menge ein Ding der Menge liegt.

39. Definition: Eine Teilmenge m einer überplanar geordneten Menge M heißt „relativ dicht“, wenn zwischen je vier, nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörenden Dingen der Menge M ein Ding der Menge m liegt.

Folgerungen: 1) Eine relativ dichte Teilmenge ist (absolut) dicht, aber im allgemeinen nicht umgekehrt.

2) Eine relativ dichte Teilmenge einer überplanar geordneten Menge besteht aus mindestens fünf nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörenden Dingen, ist also (36) überplanar geordnet. Denn ist die Teilmenge uneigentlich, dann ist der Satz evident; ist sie eigentlich und sind a, b, c, d vier, nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörende Dinge der Menge, so existieren Dinge $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ der Teilmenge, so daß ε zwischen a, b, c, d; ferner α zwischen b, c, d, ε; ferner β zwischen $\alpha, c, d, \varepsilon$; ferner γ zwischen $\alpha, \beta, d, \varepsilon$; ferner δ zwischen $\alpha, \beta, c, \varepsilon$ liegt; so liegt γ über (resp. unter) $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ und es liegt δ unter (resp. über) $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, also gehören $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ keiner planar geordneten Teilmenge an.

40. Satz: In einer überplanar geordneten Menge wird jedes Ding durch seine Ordnungsbeziehungen zu je drei, mit ihm nicht einer planar geordneten Teilmenge angehörenden Dingen einer relativ dichten Teilmenge eindeutig bestimmt.

Beweis: Sind $a \neq b$ zwei Dinge der Menge, so existieren in der relativ dichten Teilmenge zwei Dinge x, y, die mit a, b keiner planar geordneten Teilmenge angehören; denn sonst wäre, entgegen 39 Folgerung 2 die relativ dichte Teilmenge planar geordnet. Somit gibt es dann in der relativ dichten Teilmenge ein Ding z zwischen a, b, x, y; also ist z. B.

$$z \text{ unter } (bxy), \text{ über } (xya), \text{ also}$$

$$b \text{ über } (xyz), \ a \text{ unter } (xyz);$$

d. h. a und b haben jedenfalls zu dem Tripel (x, y, z) der relativ dichten Teilmenge nicht dieselbe Ordnungsbeziehung.

41. Definition: Eine überplanar geordnete Menge heißt „stetig", wenn jedem mit 32 verträglichen System von Ordnungsbeziehungen eines Dinges zu den Dingen einer überplanaren Teilmenge wenigstens ein Ding der Menge entspricht.

Folgerung: Eine überplanar geordnete stetige Menge ist dicht. Denn ist (z. B.) a über (b, c, d) und a, b, c, d Dinge einer überplanar geordneten stetigen Menge, so existieren Dinge x, die den Ordnungsbeziehungen genügen:

x über (b, c, d), unter (c, d, a), über (d, a, b), unter (a, b, c)

d. h. x zwischen (a, b, c, d).

Gruppen.

42. Definition: Eine Menge heißt „Gruppe"*) und ihre Dinge heißen „Elemente", wenn folgender Grundsatz besteht:

43. Grundsatz: Je zwei Elementen a, b der Gruppe ist ein drittes, mit $a + b$ bezeichnetes, eindeutig zugeordnet. Das Element $a + b$ heißt durch „Komposition" aus a und b entstanden.**)

44. Definition: Mit 0 (Null) werden Elemente bezeichnet, für die $0 + 0 = 0$ ist. Solche Elemente brauchen nicht vorhanden zu sein, wie das System der positiven ganzen Zahlen, mit der Addition als Komposition, beweist; sie sollen jedoch stets auf Grund der definierenden Gleichung $0 + 0 = 0$ hinzugefügt werden.

45. Eine Gruppe kann „assoziativ" sein, d. h. es kann das „assoziative***) Gesetz"

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

gelten. Daß es nicht zu gelten braucht, beweisen die „Oktaven"†),

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_{12} ij + a_{13} ik + a_{23} jk + a_{123} (ij)k,$$

*) Zuerst bei É. Galois (für Gruppen von Permutationen), s. Galois, Œuvres mathématiques publ. par É. Picard Paris 1897 S. 25.

**) Daß hier die Komposition unter dem Bilde der Addition, nicht, wie sonst bei Gruppen üblich, unter dem der Multiplikation dargestellt wird, ist natürlich unwesentlich. Z. B. faßt auch Gauß (Disquisitiones arithmeticae, Werke Bd. 1, S. 273) die Komposition der Klassen quadratischer Formen als Addition auf.

***) „Assoziativ" wahrscheinlich zuerst von Sir W. R. Hamilton eingeführt (vgl. H. Hankel, Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. Teil I, Leipzig 1867, p. 3).

†) Vgl. Cayley, Phil. Mag. 26 (1845) p. 208, 211; 30 (1847) p. 257 = Papers I p. 127, 301.

mit $$i^2+1=j^2+1=k^2+1=ij+ji=ik+ki$$
$$=jk+kj=(ij)k+i(jk)=0$$
und der Multiplikation als Komposition.

46. Eine Gruppe kann „singulär“ sein, d. h. es braucht in ihr nicht das „binäre“ Gesetz zu bestehen:

Aus $a+b=a+b'$ folgt $b=b'$,

aus $a+b=a'+b$ folgt $a=a'$.

Z. B. bilden die „dualen Zahlen“ $a+bi$, mit $i^2=0$*) oder mit $i^2=+1$ und der Multiplikation als Komposition eine singuläre Gruppe.

47. Sätze: Gelten 43 bis 46, so ist:
$$a+0=a \quad \text{und} \quad 0+a=a;$$
denn es ist
$$(a+0)+0=a+(0+0)=a+0, \text{ also } a+0=a,$$
und ebenso
$$0+(0+a)=(0+0)+a=0+a, \text{ also } 0+a=a.$$
Ferner ist:
$$a+b=a \text{ nur für } b=0,$$
$$b+a=a \quad „ \quad „ \quad b=0;$$
denn
$$a+b=a=a+0 \text{ gibt } b=0,$$
und ebenso
$$b+a=a=0+a \text{ gibt } b=0.$$
Ferner:

Es gibt nur ein Element 0. Denn gäbe es 0 und 0′, so wäre $0+0=0=0+0'$, also $0=0'$.

48. Definition: Ein Element $-a$, definiert durch
$$a+(-a)=0$$
heißt „invers“ zu a. Jede Gruppe soll durch Hinzufügen der inversen Elemente ergänzt werden. Daß solche nicht ohne weiteres vorhanden zu sein brauchen, zeigt das System der nichtnegativen ganzen Zahlen, mit der Addition als Komposition.

49. Sätze: Gelten 43 bis 46, so ist $(-a)+a=0$, d. h. $-(-a)=a$; denn aus $((-a)+a)+(-a)=(-a)+(a+(-a))=(-a)+0=-a=0+(-a)$ folgt $(-a)+a=0$; und aus $(-a)+(-(-a))=0=(-a)+a$ folgt $a=-(-a)$.

Man setzt $a+(-b)=a-b$.

*) Eingeführt von Study, Geometrie der Dynamen (Leipzig 1903) p. 195; vgl. auch: Vahlen, Über Bewegungen und komplexe Zahlen. Math. Ann. 55 p. 585.

Aus $a + x = b$ folgt $x = (-a) + b$; denn es ist

$$a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Aus $y + a = b$ folgt $y = b + (-a)$; denn es ist

$$(b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b.$$

Es ist $0 = -0$, denn aus $0 + (-0) = 0 = 0 + 0$ folgt $(-0) = 0$.

50. Eine Gruppe kann „kommutativ"*) sein, d. h. es kann das „kommutative Gesetz" gelten:

$$a + b = b + a.$$

Daß es selbst in einer nichtsingulären, assoziativen Gruppe nicht zu gelten braucht, beweisen die „Quaternionen"**)

$$a + bi + cj + dij$$

mit $i^2 + 1 = j^2 + 1 = ij + ji = 0$, reellen Zahlen a, b, c, d und der Multiplikation als Komposition.

In einer Gruppe können mehrere Arten der Komposition bestehen, z. B. im System der positiven ganzen Zahlen Addition, Multiplikation und Potenzieren.

Geordnete Gruppen.

51. Definition: Eine Gruppe heißt „geordnet", wenn sie eine geordnete Menge ist, in der durch die Elemente $(0, a)$ und $(-a, 0)$ dieselbe lineare Teilmenge bestimmt wird und der „additive Anordnungs-Grundsatz" (52) besteht.

52. Grundsatz: Zwischen den Elementen $a, b, c, d, \ldots$ bestehen dieselben Ordnungsbeziehungen, wie zwischen den Elementen $a + h$, $b + h$, $c + h, \ldots$ und wie zwischen den Elementen $h + a$, $h + b$, $h + c, \ldots$

---

53. Folgerungen im linearen Fall: Aus a vor 0 folgt $-a$ nach 0. Aus a vor b folgt $a - b$ vor 0, $b - a$ nach 0, $-a$ nach $-b$.

54. Satz: In einer linear geordneten Gruppe liegt $a + b$ zwischen $a + a$ und $b + b$.

Beweis: Aus (z. B.) a vor b folgt: $a + a$ vor $a + b$ und $a + b$ vor $b + b$ (nach 52).

55. Satz: In einer linear geordneten Gruppe folgt aus a vor 0, b nicht nach 0, stets $a + b$ vor 0.

Beweis: a vor 0 gibt (52) $a + b$ vor b; also (10) $a + b$ vor 0.

56. Satz: In einer linear geordneten Gruppe gibt es kein Element x vor oder nach allen andern Elementen $a, b, c, \ldots$

*) „Kommutativ" von Servois (Gergonnes Ann. Bd. V, 1814, S. 93) eingeführt.
**) Hamilton, Lectures on Quaternions (Dublin 1853).

Beweis: Aus x vor a folgt (52) $(x-a)+x$ vor x.

57. Definition: Eine linear geordnete Gruppe heißt meßbar, wenn der Grundsatz der Meßbarkeit 58 besteht.*)

58. Grundsatz: Sind a (nach 0) und x zwei Elemente, so ist x vor a, oder vor $a+a$, oder vor $a+a+a$, usw.**)

---

59. Folgerungen im planaren Fall: Aus a rechts $(0, x)$ folgt x links $(0, a) = (-a, 0)$, $-a$ links $(0, x)$. Aus a rechts (b, c) folgt $a-b$ rechts $(0, c-b)$, also $b-a$ links $(0, c-b)$, also $(b-a)$ rechts $(0, b-c)$, also $-a$ rechts $(-b, -c)$.

60. Satz: In einer planar geordneten Gruppe liegt $a+b+c$ zwischen $a+a+a$, $b+b+b$, $c+c+c$.

Beweis (wenn der Kürze halber das assoziative und das kommutative Gesetz vorausgesetzt und $a+a=2a$, $a+2a=3a$ usw. gesetzt wird):

Aus (z. B.) c rechts (a, b) folgt der Reihe nach erstens:

$-c$ rechts $(-a, -b)$,

$a-c$ „ $(0, a-b)$, rechts $(b-a, 0)$,

$2a-b-c$ „ $(0, a-b)$, links $(0, b-a)$,

zweitens:

0 rechts $(a-c, b-c)$, rechts $(2a-2c, b-c)$,

0 links $(2a-2c, c-b)$, links $(2a-2c, 2a-c-b)$,

0 rechts $(2c-2a, 2a-b-c)$, rechts $(c-b, 2a-b-c)$,

$2a-b-c$ links $(0, b-c)$,

also:

$2a-b-c$ links $(0, 2b-a-c)$,

0 rechts $(2a-b-c, 2b-a-c)$,

$a+b+c$ „ $(3a, 3b)$,

ebenso:

$a+b+c$ rechts $(3b, 3c)$,

$a+b+c$ „ $(3c, 3a)$.

61. Satz: In einer planar geordneten Gruppe folgt aus a rechts $(0, x)$ und b nicht links $(0, x)$ stets $a+b$ rechts $(0, x)$.

Beweis: Es gehören $-a$, 0, a einer linearen Teilmenge in dieser

---

*) Eine linear geordnete, dichte, meßbare Gruppe ist kommutativ (vgl. O. Hölder, l. c. p. 13).

**) Das Archimedische Axiom; s. Archimedis Opera, rec. Heiberg, vol. I, 1880, p. 11.

Ordnung an, also auch (52) die Elemente: $0, a, a+a$. Aus a rechts $(0, x)$ folgt also x links $(0, a) = (0, a+a)$, also auch $a+a$ rechts $(0, x)$; ebenso folgt $b+b$ nicht links $(0, x)$. Nun gehören $a-b$, 0, $b-a$ einer linearen Teilmenge an, also auch $a+a$, $a+b$, $b+b$, und $a+b$ liegt (54) zwischen $a+a$ und $b+b$; folglich ist (23 Folg. 2) $a+b$ rechts $(0, x)$.

62. Satz: In einer planar geordneten Gruppe gibt es kein solches Elementenpaar (x, y), daß alle andern Elemente rechts oder links (x, y) liegen.

Beweis: Aus a rechts (x, y) folgt

$$a-x-y \text{ rechts } (-y, -x), \quad \text{also} \quad x+y-a \text{ links } (x, y).$$

63. Definition: Eine planar geordnete Gruppe heißt **meßbar**, wenn der Grundsatz der Meßbarkeit (64) besteht.

64. Grundsatz: Sind (a, b, x) drei beliebige Elemente und 0 links (a, b), so ist x links (a, b), oder links $(a+a,\ b+b)$, oder links $(a+a+a,\ b+b+b)$, usw.

---

65. Folgerungen im überplanaren Fall: Aus a unter $(0, x, y)$ folgt x über $(0, a, y) = (-a, 0, y)$, also $-a$ über $(0, x, y)$. Aus a unter (b, c, d) folgt $a-b$ unter $(0, c-b, d-b)$, also $b-a$ über $(0, b-c, b-d)$ also $-a$ über $(-b, -c, -d)$.

66. Satz: In einer überplanar geordneten Gruppe liegt $a+b+c+d$ zwischen $4a$, $4b$, $4c$, $4d$.

Beweis (vgl. 60): Aus d unter (a, b, c) folgt (52)

$$0 \text{ unter } (a-d,\ b-d,\ c-d),$$

also (67)

$$0 \text{ unter } (3a-3d,\ b-d,\ c-d), \tag{1}$$

also

$$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ b-d,\ c-d), \tag{2}$$

ebenso

$$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ c-b,\ d-c) \tag{3}$$

und

$$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ c-b,\ d-b). \tag{4}$$

Ferner aus (1)

$$0 \text{ unter } (3a-3d,\ a-b,\ d-c) \tag{5}$$

und aus (5)

$$0 \text{ unter } (3a-2d-c,\ a-b,\ d-c) \tag{6}$$

und aus (6)

$$0 \text{ unter } (3a-d-2c,\ a-b,\ d-c). \tag{7}$$

Aus (6) und (7)

(8) $$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ b-a,\ c-d).$$

Aus (2), (3), (8)

(9) $$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ 3b-a-c-d,\ c-d).$$

Ferner aus

$$0 \text{ über } (b-a,\ c-d,\ d-a)$$

folgt

$$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ b-a,\ c-a)$$

und

(10) $$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ b-a,\ c-b),$$

aus (4) und (10)

(11) $$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ 3b-a-c-d,\ c-b).$$

Ebenso

(12) $$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ 3b-a-c-d,\ c-a).$$

Aus (9), (11), (12)

$$0 \text{ unter } (3a-b-c-d,\ 3b-a-c-d,\ 3c-a-b-d),$$

also

$$a+b+c+d \text{ unter } (4a,\ 4b,\ 4c),$$

ebenso

$$a+b+c+d \text{ über } (4b,\ 4c,\ 4d)$$

und

$$a+b+c+d \text{ unter } (4c,\ 4d,\ 4a)$$

und

$$a+b+c+d \text{ über } (4d,\ 4a,\ 4b),$$

also

$$a+b+c+d \text{ zwischen } (4a,\ 4b,\ 4c,\ 4d).$$

67. Satz: In einer überplanar geordneten Gruppe folgt aus a über $(0, x, y)$ und b nicht unter $(0, x, y)$ stets $a+b$ über $(0, x, y)$.

Beweis: Es gehören (61) $0, a, a+a$ in dieser Ordnung einer linearen Teilmenge an. Also folgt aus a über $(0, x, y)$ der Reihe nach: x unter $(0, a, y) = (0, a+a, y)$, $a+a$ über $(0, x, y)$, ebenso $b+b$ nicht unter $(0, x, y)$. Also, da (54) $a+a$, $a+b$, $b+b$ in dieser Ordnung einer linearen Teilmenge angehören, folgt (34 Folg. 2) $a+b$ über $(0, x, y)$.

68. Satz: In einer überplanar geordneten Gruppe gibt es kein Elemententripel (x, y, z), so daß alle andern Elemente über oder unter (x, y, z) liegen.

Beweis: Aus a unter (x, y, z) folgt 0 unter (x', y', z'), wenn zur Abkürzung $x-a=x'$, $y-a=y'$, $z-a=z'$ gesetzt wird. Nun folgt der Reihe nach (67):

$$0 \text{ unter } (x'+y',\ y',\ z'), \text{ unter } (x'+y',\ y'+z',\ z'),$$

ferner

$$0 \text{ unter } (x', y', y'+z'), \text{ unter } (x', x'+y', y'+z'), \text{ unter } (x'+y', y'+z', x'),$$

also (67)

$$0 \text{ unter } (x'+y',\ y'+z',\ z'+x'),$$
$$-(x'+y'+z') \text{ unter } (-z',\ -x',\ -y'), \text{ unter } (-x',\ -y',\ -z'),$$
$$x'+y'+z' \text{ über } (x',\ y',\ z'),$$
$$x+y+z-3a \text{ über } (x-a,\ y-a,\ z-a),$$
$$x+y+z-2a \text{ über } (x,\ y,\ z).$$

69. Definition: Eine überplanar geordnete Gruppe heißt meßbar, wenn der Grundsatz der Meßbarkeit (70) besteht.

70. Grundsatz: Sind a, b, c, x vier beliebige Elemente und ist 0 unter (a, b, c), so ist x unter (a, b, c), oder unter $(a+a, b+b, c+c)$, oder unter $(a+a+a, b+b+b, c+c+c)$, usw.

Zahlensysteme.

71. Definition: Eine Gruppe heißt ein „Zahlensystem“ und ihre Elemente heißen „Zahlen“, wenn in ihr zwei Arten der Komposition bestehen und diese durch die „distributiven“*) Gesetze (72) verbunden sind.

72. Bezeichnet man die eine Art der Komposition mit $a+b$, die andere mit ab, so ist

$$a(b+c) = ab + ac,$$
$$(a+b)c = ac + bc.$$

73. Definitionen: Dann heißt die Komposition $a+b$ „Addition“, die Komposition ab „Multiplikation“, und es sind in bekannter Weise die Worte Augend, Addend, Summand, Summe, Subtrahend, Minuend, Differenz, Subtraktion, Multiplikator, Multiplikand, Faktor, Produkt zu erklären.

74. Sätze: Für die Addition sollen stets die Gesetze 43 bis 48 gelten. Aus dem ersten distributiven Gesetz folgt $aa + a\cdot 0 = a(a+0) = aa = aa + 0$, also $a \cdot 0 = 0$. Aus dem zweiten distributiven Gesetz folgt ebenso $0\cdot a + aa = (0+a)a = aa = 0 + aa$ also $0 \cdot a = 0$. Aus der Geltung beider distributiven Gesetze folgt, daß die Addition kommutativ ist: $a+b = (-b+b) + (a+b) + (a-a) = -b + (b+a) + (b+a) - a = -b + (b+a)\,(1+1) - a = -b + b\,(1+1) + a\,(1+1)$

*) Zuerst gebraucht von Servois (Gergonnes Ann. Bd. V, 1814, S. 93).

$-a = -b + b + b + a + a - a = b + a$. Gilt nur ein distributives Gesetz, wie z. B. beim Multiplizieren und Potenzieren $(ab)^c = a^c \cdot b^c$, so braucht keine der beiden Kompositionen kommutativ zu sein.

75. Das Zahlensystem kann „assoziativ“ sein, d. h. es kann das assoziative Gesetz der Multiplikation bestehen:

A $$(ab)c = a(bc).$$

Daß es nicht zu bestehen braucht, beweisen die Oktaven (45).

76. Definition: Eine Zahl a heißt „singulär“, wenn für dieselbe nicht das „binäre“ Gesetz der Multiplikation gilt:

B $$\begin{aligned} &\text{Aus } ab = ab' \text{ folgt } b = b', \\ &\text{aus } ba = b'a \text{ folgt } b = b'. \end{aligned}$$

Demnach ist 0 eine singuläre Zahl. Ein Zahlensystem heißt singulär, wenn es noch andere singuläre Zahlen außer der Null enthält. In einem nichtsingulären Zahlensystem folgt aus $ab = 0$ entweder $a = 0$ oder $b = 0$; während in einem singulären Systeme $a(b - b') = 0$ und $a \neq 0$, $b - b' \neq 0$ sein kann.*)

Daß das binäre Gesetz der Multiplikation nicht für alle Zahlen $\neq 0$ zu bestehen braucht, beweisen die dualen Zahlen (s. 46).

77. Definition: Mit 1 („Eins“) werden diejenigen nichtsingulären Zahlen bezeichnet, für welche

$$1 \cdot 1 = 1$$

ist. Solche Zahlen brauchen nicht vorhanden zu sein, wie das System 2, 3, 4, ... beweist; es sollen aber stets diese Zahlen auf Grund der obigen beiden definierenden Eigenschaften dem System hinzugefügt werden.

78. Sätze: A (s. 75) vorausgesetzt, ist $a \cdot 1 = a$. Denn aus $(a \cdot 1) \cdot 1 = a(1 \cdot 1) = a \cdot 1$ folgt $a \cdot 1 = a$. Ebenso $1 \cdot a = a$.**) Ferner $a \cdot (-1) = -a$; denn aus $a + (-a) = 0 = a \cdot 0 = a(1 + (-1)) = a \cdot 1 + a \cdot (-1)$ folgt $-a = a \cdot (-1)$. Ebenso $-a = (-1) \cdot a$. Ferner: es gibt nur eine nichtsinguläre Zahl 1 definiert durch $1 \cdot 1 = 1$. Denn aus $a \cdot a = a = a \cdot 1$ folgt entweder $a = 1$ oder a singulär.

79. Definitionen: Man setzt $1 + 1 = 2$ (zwei), $2 + 1 = 3$ (drei) usw. Die Zahlen $\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots$ heißen die „ganzen“ Zahlen. Man setzt $a^1 = a$, $a^{k+1} = a^k \cdot a$ („Potenzen“ von a) usw.

---

*) Singuläre Zahlen heißen bei Weierstraß „Teiler der Null“.

**) Eine Zahl e dieser Art, daß stets $ae = ea = a$ ist, heißt bei Stolz (s. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik II, Leipzig 1902, p. 282) eine indifferente Zahl oder ein Modulus.

80. Definition: Die Menge der positiven ganzen Zahlen und jede Menge, deren Dinge den positiven ganzen Zahlen eindeutig zuzuordnen sind, heißt „abzählbar"*). Eine eigentliche Teilmenge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen 1, 2, 3, ..., k, und jede Menge, deren Dinge den Zahlen einer solchen Menge eindeutig zuzuordnen sind, heißt „endlich". Abzählbare und endliche Mengen sind linear geordnet.

81. Definition: Durch die Gleichung:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

und die Forderung, daß das assoziative Gesetz

$$(bc)d = b(cd)$$

und die distributiven Gesetze $(b+c)e = be + ce$, $e(b+c) = eb + ec$ auch bestehen sollen, wenn b, c, d nicht alle von $\frac{1}{a}$ oder $f \cdot \frac{1}{a}$ oder $\frac{1}{a} \cdot f$ verschieden sind, wird eine zu a „reziproke" Zahl $\frac{1}{a}$ definiert.

82. Satz: Ist a singulär, so ist die reziproke $\frac{1}{a}$ nicht eindeutig.

Beweis: Es existiert b so, daß $ab = 0$ ist. Demnach ist jede Zahl $\frac{1}{a} + kb$, wo k ganz, eine Reziproke von a.

83. Satz: Ist a nichtsingulär, so ist die Reziproke $\frac{1}{a}$ eindeutig bestimmt und genügt (außer A) den Gesetzen

45, 46, 50, 72, B.

Beweis: Sie ist eindeutig, denn $ab = 1 = ab'$ gibt $b = b'$.

Es ist ferner: $a\left(\frac{1}{a}\,a\right) = \left(a\,\frac{1}{a}\right)a = 1 \cdot a = a \cdot 1$, also $\frac{1}{a}\,a = 1$.

Für $\frac{1}{a}$ gilt B, denn aus

$$\frac{1}{a}\,b = \frac{1}{a}\,b' \text{ folgt } a\left(\frac{1}{a}\,b\right) = a\left(\frac{1}{a}\,b'\right) \text{ d. h. } b = b';$$

und aus

$$b\,\frac{1}{a} = b'\,\frac{1}{a} \text{ folgt } b\left(\frac{1}{a}\,a\right) = b'\left(\frac{1}{a}\,a\right) \text{ d. h. } b = b'.$$

Es gilt 72; denn es ist

$$\left((b+c)\,\frac{1}{a}\right)a = (b+c)\left(\frac{1}{a}\,a\right) = b\left(\frac{1}{a}\,a\right) + c\left(\frac{1}{a}\,a\right) = \left(b\,\frac{1}{a}\right)a + \left(c\,\frac{1}{a}\right)a$$

$$= \left(b\,\frac{1}{a} + c\,\frac{1}{a}\right)a, \text{ also: } (b+c)\,\frac{1}{a} = b\,\frac{1}{a} + c\,\frac{1}{a}\cdot$$

*) Zuerst eingeführt von G. Cantor, Journ. f. Math. 77 (1873), S. 258.

Ebenso
$$\frac{1}{a}(b+c)=\frac{1}{a}b+\frac{1}{a}c.$$
Ferner ist:
$$1+0=1=a\cdot\frac{1}{a}=(a+0)\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}+0\cdot\frac{1}{a}=1+0\cdot\frac{1}{a},\text{ also } 0\cdot\frac{1}{a}=0.$$
Ebenso:
$$1+0=1=\frac{1}{a}\cdot a=\frac{1}{a}(a+0)=\frac{1}{a}\cdot a+\frac{1}{a}\cdot 0=1+\frac{1}{a}\cdot 0,\text{ also } \frac{1}{a}\cdot 0=0.$$

Dann folgt:
$$a\left(\frac{1}{a}\cdot 1\right)=\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)\cdot 1=1\cdot 1=1=a\cdot\frac{1}{a},\quad\text{also } \frac{1}{a}\cdot 1=\frac{1}{a};$$
ebenso:
$$a\left(1\cdot\frac{1}{a}\right)=(a\cdot 1)\cdot\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a},\qquad\text{also } 1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

Dann gilt 50, denn
$$(b+c)=(ba+ca)\frac{1}{a}=(ca+ba)\frac{1}{a}=c+b,$$
auch wenn b oder c oder beide gleich $\frac{1}{a}$.

Ebenso 45, denn
$$(b+c)+d=((b+c)\,a+da)\,\frac{1}{a}=(ba+(ca+da))\,\frac{1}{a}=b+(c+d),$$
auch wenn b, c, d nicht alle von $\frac{1}{a}$ verschieden.

Schließlich 46, denn
$$\frac{1}{a}+b=\frac{1}{a}+b' \text{ gibt: } (1+ba)\,\frac{1}{a}=(1+b'a)\,\frac{1}{a},\text{ also } 1+ba=1+b'a,$$
also $ba=b'a$, also $b=b'$.

84. Daß in einem Zahlensystem die reziproken Zahlen nicht vorhanden zu sein brauchen, beweist das System der ganzen Zahlen. Es sollen aber stets die reziproken Zahlen der nichtsingulären Zahlen auf Grund der definierenden Eigenschaften zu dem System hinzugenommen werden.

85. Sätze: Aus $ax=b$, a nichtsingulär, folgt nur $x=\frac{1}{a}b$; denn es ist $a\frac{1}{a}b=b$. Ebenso folgt für nichtsinguläre a aus $ya=b$ nur $y=b\frac{1}{a}$; dies soll mit $\frac{b}{a}$ bezeichnet werden.*) Man kann $\frac{1}{a}=a^{-1}$,

*) Vgl. Clifford, Mathematical Papers (London 1882) p. 184. Cayley unterscheidet $\frac{|a}{b|}$ und $\frac{a|}{|b}$ definiert durch $b\,\frac{|a}{b|}=a$ und $\frac{a|}{|b}\,b=a$.

$a^0 = 1$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ setzen, da dies mit $a^{k+1} = a^k a$ in Einklang, wenn, wie im folgenden stets, A vorausgesetzt wird.

86. Definitionen: Die Worte: Division, Divisor, Dividend, Quotient, Bruch, Zähler, Nenner, gebrochene Zahl, rationale Zahl sind hier in bekannter Weise zu erklären. Die nichtrationalen Zahlen, welche im System der rationalen Zahlen durch Anordnungsbeziehungen definiert werden können und welche das System zu einem stetigen ergänzen, heißen „irrationale"*) Zahlen; die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden das System der „reellen"**) Zahlen.

87. Ein Zahlensystem kann „kommutativ" sein, d. h. es kann das kommutative Gesetz der Multiplikation gelten:

C $$ab = ba.$$

Daß es nicht zu gelten braucht, auch wenn alle vorhergehenden Sätze gelten, beweist das System der „Quaternionen":

$$a + bi + cj + dij,$$

wo a, b, c, d rationale Zahlen sind und i, j den Gleichungen genügen:

$$i^2 + 1 = j^2 + 1 = ij + ji = 0.$$

88. Sätze: Es ist $2a = (1+1)a = a + a = a(1+1) = a \cdot 2$ usw., allgemein $ka = ak$ für ganze Zahlen k. Ferner $2a\frac{1}{2} = a\frac{1}{2} + a\frac{1}{2}$ $= a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a$, also $a\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a$; ebenso allgemein $\frac{k}{h}a = a\frac{k}{h}$ für ganze Zahlen h, k.

89. Im folgenden kommen nur Systeme in Betracht, in denen die aufgestellten Axiome der Verknüpfung alle gelten, mit eventueller Ausnahme von A, B, C.

90. Satz: In einem System mit A, B, ohne C hat eine quadratische Gleichung $x^2 - 2ax + A = 0$ im allgemeinen beliebig viele Wurzeln x; gilt aber C, so hat sie niemals mehr als zwei.

Beweis: Es sei z. B. das System das der Quaternionen und a, A reelle Zahlen, $A - a^2$ eine positive Zahl. Man zerlege $A - a^2$ in $b^2 + c^2 + d^2$ was auf beliebig viele Arten möglich ist, so genügt $x = a + bi + cj + dij$ stets der Gleichung.

---

*) Die irrationalen Zahlen werden also auf Grund von Anordnungs- (d. h. Größen-) Beziehungen definiert. „Das Irrationale verlangt zu seiner systematischen Fassung den Größenbegriff" (Hankel, l. c. S. 47).

**) Zuerst in Descartes' Géométrie 1637.

Zweitens seien x und y zwei Lösungen, so folgt:

$$0 = x^2 - 2ax - y^2 + 2ay = (x + y - 2a)(x - y) + (xy - yx),$$

also wenn C gilt:

$$(x + y - 2a)(x - y) = 0,$$

also weil B gilt, entweder

$$x - y = 0, \quad y = x$$

oder

$$x + y - 2a = 0, \quad y = 2a - x.$$

91. Definition: Im System der reellen Zahlen hat die Gleichung

$$i^2 + 1 = 0$$

keine Lösung, da für $x >$ oder $=$ oder < 0 stets $x^2 + 1 > 0$ ist. Es soll aber dem System der reellen Zahlen eine Zahl i, die „imaginäre Einheit", hinzugefügt werden, definiert erstens durch die Gleichung

$$i^2 + 1 = 0,$$

zweitens durch die Forderung, daß in dem erweiterten System, dem System der „imaginären*) Zahlen", die distributiven Gesetze und das assoziative Gesetz $(ab)\,c = a\,(bc)$, wo a, b, c reell oder gleich i sind, gelten sollen. Dann folgt nämlich, daß allgemein A und C gelten; ferner B daraus, daß $(a + bi)(c + di) = 0$ die Gleichung $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0$ nach sich zieht. — Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

hat dann (s. 90) nur die zwei Wurzeln $+ i$, $- i$.

92. Satz: In einem System mit A, B, ohne C haben lineare Gleichungen, z. B. $axa' + bxb' + cxc' + d = 0$ im allgemeinen unendlich viele Lösungen.

Beweis: Es genügt, im System der Quaternionen eine Gleichung von der Form $xa + bx + c = 0$ mit beliebig vielen Lösungen herzustellen. Man wähle für a und ξ beliebige, ganzzahlige Quaternionen, so daß $a\xi \neq \xi a$; dann b so, daß $\xi a + b\xi = 0$. Jetzt ist $\xi^2 a + b\xi^2 \neq 0$, denn aus $\xi a + b\xi = 0$, $\xi^2 a + b\xi^2 = 0$ würde für $\xi = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij$ folgen:

$$\{\xi^2 - 2\alpha\xi + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\}\, a + b\,\{\xi^2 - 2\alpha\xi + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\} = 0,$$

also

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(a + b) = 0, \quad a = -b,$$

$\xi a = a\xi$, gegen die Wahl von a und ξ. Setzt man

$$\xi^2 a + b\xi^2 + c = 0,$$

*) Zuerst bei Descartes l. c.

so hat die Gleichung

$$xa + bx + c = 0$$

die beliebig vielen Lösungen:

$$x = \xi^2 + k\xi,$$

für jede ganze Zahl k.*)

93. Definitionen: In einem Zahlensystem heißt ein Zahlenpaar (x, y), ein Zahlentripel (x, y, z) usw. singulär nur, wenn alle Zahlen x, y, resp. x, y, z usw. singulär sind. Das System $(x, y, z, \cdot\cdot)$ heißt eine „Lösung" der „Gleichung" mit den „Koeffizienten" $(\xi, \eta, \zeta, \cdot\cdot)$, wenn $x\xi + y\eta + z\zeta + \cdot\cdot = 0$ ist. Für jedes nichtsinguläre l sind die Gleichungen mit den Koeffizientensystemen $(\xi, \eta, \zeta, \cdot\cdot)$ und $(\xi l, \eta l, \zeta l, \cdot\cdot)$, für jedes nichtsinguläre λ sind die Lösungen $(x, y, z, \cdot\cdot)$ und $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \cdot\cdot)$ als identisch anzusehen.

94. Definitionen: Ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta + z\zeta + \cdot\cdot &= 0 \\ x\xi' + y\eta' + z\zeta' + \cdot\cdot &= 0 \\ x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + \cdot\cdot &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

heißt vom „Range"**) 0, wenn sämtliche Koeffizienten Null, vom „Singularitätsrange" 0, wenn sämtliche Koeffizienten singulär sind. Ist es nicht vom Singularitätsrange 0, also z. B. ξ nichtsingulär, so heißt das System vom Singularitätsrange 1, wenn die sämtlichen Ausdrücke:

$$\begin{array}{ll} \frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta', & \frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta', \cdot\cdot \\ \frac{\eta}{\xi}\xi'' - \eta'', & \frac{\zeta}{\xi}\xi'' - \zeta'', \cdot\cdot \quad \text{usw.} \end{array}$$

singulär, und es heißt vom Range 1, wenn dieselben Null sind. Ist das System nicht vom Singularitätsrange 1, also z. B. $\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'$ nichtsingulär, so heißt es vom Singularitätsrange 2, wenn die sämtlichen Ausdrücke:

$$\left(\frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'} \cdot \frac{\eta}{\xi} - \frac{\zeta}{\xi}\right)\xi'' - \frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'}\eta'' + \zeta'' \quad \text{usw.}$$

singulär, und es heißt vom Range 2, wenn dieselben Null sind. Usw.

*) Z. B. gibt $a = b = i$, $\xi = j$ die Gleichung $xi + ix + 2i = 0$ mit den beliebig vielen Lösungen $x = -1 + kj$.

**) Eingeführt von Kronecker, Berl. Ber. (1884) p. 1071.

95. Satz: Ist die Gleichung $x\xi + y\eta = 0$ vom Singularitätsrange 1, so hat sie genau eine nichtsinguläre Lösung.

Beweis: Ist z. B. ξ nichtsingulär, so wähle man y beliebig nichtsingulär. Dann ergibt sich $x = -y\frac{\eta}{\xi}$, d. h. $\left(-y\frac{\eta}{\xi},\ y\right) = \left(+\frac{\eta}{\xi},\ -1\right)$ (s. 93) als die nichtsinguläre Lösung.

96. Satz: Das System

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta &= 0 \\ x\xi' + y\eta' &= 0 \end{aligned}$$

hat eine bestimmte nichtsinguläre Lösung, wenn es vom Range 1, also auch vom Singularitätsrange 1; keine Lösung, wenn es vom Range 2 ist.

Beweis: Ist z. B. ξ nichtsingulär, so muß $\left(+\frac{\eta}{\xi},\ -1\right)$ auch Lösung der zweiten Gleichung, also $\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta' = 0$ sein.

97. Satz: Hat das System

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta &= 0 \\ x\xi' + y\eta' &= 0 \end{aligned}$$

den Rang 1, dann hat auch das „transponierte" System

$$\begin{aligned} \xi l + \xi' l' &= 0 \\ \eta l + \eta' l' &= 0 \end{aligned}$$

den Rang 1, also eine bestimmte nichtsinguläre Lösung.

Beweis: Ist z. B. ξ nichtsingulär, so ist $(l,\ l') = \left(\frac{1}{\xi}\xi',\ -1\right)$ die Lösung, denn $\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta' = 0$.

98. Satz: Ist das System

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta + z\zeta &= 0 \\ x\xi' + y\eta' + z\zeta' &= 0 \end{aligned}$$

vom Range 2, also vom Singularitätsrange 2, so hat es eine bestimmte nichtsinguläre Lösung.

Beweis: Ist z. B. ξ und $\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'$ nichtsingulär, so ist

$$\left(\frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'} \cdot \frac{\eta}{\xi} - \frac{\zeta}{\xi},\ -\frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'},\ 1\right)$$

die nichtsinguläre Lösung, wie sich durch 95 aus der Gleichung

$$y\left(\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'\right) + z\left(\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'\right) = 0$$

und dann aus

$$x = -y\frac{\eta}{\xi} - z\frac{\zeta}{\xi}$$

ergibt.

99. Satz: Das System

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta + z\zeta &= 0 \\ x\xi' + y\eta' + z\zeta' &= 0 \\ x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' &= 0 \end{aligned}$$

hat eine bestimmte nichtsinguläre Lösung, wenn es vom Range 2, also auch vom Singularitätsrange 2 ist, keine Lösung, wenn es vom Range 3.

Beweis: Ist z. B. ξ und $\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'$ nichtsingulär, so muß die Lösung der beiden ersten Gleichungen (s. 98) der dritten genügen, also:

$$\left(\frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'}\frac{\eta}{\xi} - \frac{\zeta}{\xi}\right)\xi'' - \frac{\frac{\zeta}{\xi}\xi' - \zeta'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'}\eta'' + \xi'' = 0$$

sein.

100. Satz: Ist das System

$$\begin{aligned} x\xi + y\eta + z\zeta &= 0 \\ x\xi' + y\eta' + z\zeta' &= 0 \\ x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' &= 0 \end{aligned}$$

vom Range 2, dann hat auch das transponierte System:

$$\begin{aligned} \xi l + \xi' l' + \xi'' l'' &= 0 \\ \eta l + \eta' l' + \eta'' l'' &= 0 \\ \zeta l + \zeta' l' + \zeta'' l'' &= 0 \end{aligned}$$

eine nichtsinguläre Lösung.

Beweis: Es ist:

$$(l, l', l'') = \left(\frac{\frac{1}{\xi}\xi'}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'}\left(\frac{\eta}{\xi}\xi'' - \eta''\right) - \frac{1}{\xi}\xi'',\ -\frac{1}{\frac{\eta}{\xi}\xi' - \eta'}\left(\frac{\eta}{\xi}\xi'' - \eta''\right),\ 1\right)$$

die nichtsinguläre Lösung.

101. Im Hinblick auf die geometrischen Anwendungen braucht hier die Theorie der linearen Gleichungen nicht weiter verfolgt zu werden. Daß sie sich im wesentlichen wie in gewöhnlichen Zahlensystemen verhält, ist bereits erkennbar. Übrigens hätte man zwischen

„rechtssingulären“ Zahlen $x \neq 0$ und „linkssingulären“ Zahlen $\xi \neq 0$, mit $x\xi = 0$, zu unterscheiden, wovon wir aber absehen, da dieser Unterscheidung hier keine Bedeutung zukommt.

Im folgenden werden, wie oben, die aufgestellten Gesetze außer B, C vorausgesetzt, und, wo Divisionen vorkommen, soll der Divisor als nichtsingulär angenommen werden.

102. Definitionen: Es heißt $(\alpha, \beta) = \alpha - \beta$ der „Abstand“ von α und β, ferner $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(\alpha, \gamma)}{(\beta, \gamma)}$ das „Verhältnis“ der drei Zahlen α, β, γ, schließlich $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)}{(\alpha, \beta, \delta)}$ das „Doppelverhältnis“ der vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

103. Sätze: Es ist $(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$. Es ist $(\alpha\beta) + (\beta\gamma) = (\alpha\gamma)$. Es ist

$$(\alpha\beta\gamma)(\beta\alpha\gamma) = 1, \text{ denn } \frac{(\alpha\gamma)}{(\beta\gamma)} \cdot \frac{(\beta\gamma)}{(\alpha\gamma)} = 1.$$

Es ist

$$(\alpha\beta\gamma) + (\alpha\gamma\beta) = 1, \text{ denn } \frac{(\alpha\gamma)}{(\beta\gamma)} + \frac{(\alpha\beta)}{(\gamma\beta)} = \frac{(\alpha\gamma) + (\beta\alpha)}{(\beta\gamma)} = 1.$$

Setzt man also $(\alpha\beta\gamma) = \lambda$, so kommt:

$$(\alpha\beta\gamma) = \lambda \quad (\beta\gamma\alpha) = 1 - \frac{1}{\lambda} \quad (\gamma\alpha\beta) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$(\beta\alpha\gamma) = \frac{1}{\lambda} \quad (\alpha\gamma\beta) = 1 - \lambda \quad (\gamma\beta\alpha) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}}.$$

Das Verhältnis $(\alpha\beta\gamma)$ ist eine „affine Invariante“, d. h. es bleibt unverändert, wenn man auf α, β, γ dieselbe lineare ganze Substitution anwendet.*)

Gelten B und C, so können diese 6 Werte zu je zweien einander gleich werden:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1, \quad 1 - \frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = 2, \quad \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{2}.$$

dann wird $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$; γ das „arithmetische“ Mittel von α und β.

Gelten B und C, so können die 6 Werte des Verhältnisses auch

---

*) Derartige Funktionen werden sonst als Semi-Invarianten bezeichnet (s. F. W. Meyer, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Ber. d. deutschen Math. Ver. I, Berlin 1892); es entspricht durchaus dem üblichen Sprachgebrauch des Wortes „affin“ dieselben als affine Invarianten den projektiven gegenüberzustellen.

zu je dreien einander gleich werden:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} = -\varepsilon, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \lambda = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = -\varepsilon^2, \text{ wo } \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Dann ist $\alpha + \varepsilon\beta + \varepsilon^2\gamma = \beta + \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\alpha = \gamma + \varepsilon\alpha + \varepsilon^2\beta = 0$ und jede der drei Zahlen α, β, γ heißt ein „äquianarithmetisches“ Mittel der beiden anderen. Es ist $\varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ und in der komplexen Zahlenebene bilden α, β, γ ein gleichseitiges Dreieck.

104. Satz: Durch zwei der drei Zahlen α, β, γ und das Verhältnis $(\alpha\beta\gamma)$ ist die dritte Zahl im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus $\alpha - \gamma = \lambda(\beta - \gamma)$ folgt $\alpha = \gamma + \lambda(\beta - \gamma)$, ebenso $\beta = \gamma + \frac{1}{\lambda}(\alpha - \gamma)$ und $\gamma = \beta + \frac{1}{1-\lambda}(\alpha - \beta)$. Also ist λ und $1 - \lambda$ als nicht singulär vorauszusetzen. — Insbesondere ist das arithmetische Mittel zweier Zahlen eindeutig, das äquianarithmetische zweideutig bestimmt.

105. Sätze: $(\alpha\beta\gamma\delta) = \lambda$ gesetzt, ist

$$(\alpha\beta\delta\gamma) = \frac{(\alpha\beta\delta)}{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ferner ist

$$(\beta\alpha\gamma\delta) = \frac{(\beta\alpha\gamma)}{(\beta\alpha\delta)} = \frac{1}{\mu}$$

und $\mu \neq \lambda$ im allgemeinen.

Gilt aber C für λ, so folgt:

$$(\beta-\gamma)^{-1}(\beta-\delta) = \lambda(\alpha-\gamma)^{-1}(\alpha-\delta)$$

$$\frac{1}{\beta-\gamma}((\beta-\gamma)-(\delta-\gamma))\frac{1}{\delta-\gamma} = \frac{\lambda}{\alpha-\gamma}((\alpha-\gamma)-(\delta-\gamma))\frac{1}{\delta-\gamma}$$

$$\frac{1-\lambda}{\delta-\gamma} = \frac{1}{\beta-\gamma} + \frac{-\lambda}{\alpha-\gamma},$$

also

$$\lambda = \frac{\frac{1}{\beta-\gamma} - \frac{1}{\delta-\gamma}}{\frac{1}{\alpha-\gamma} - \frac{1}{\delta-\gamma}},$$

also $(\beta\alpha\gamma\delta) = \frac{1}{\lambda}$, also auch $(\beta\alpha\delta\gamma) = \lambda$. Ferner folgt ebenso

$$\frac{1}{\lambda} = (\beta\alpha\gamma\delta) = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} : \frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta} = \frac{\frac{1}{\alpha-\beta}((\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta))\frac{1}{\alpha-\gamma}}{\frac{1}{\alpha-\beta}((\alpha-\delta)-(\alpha-\beta))\frac{1}{\alpha-\delta}} = \frac{\frac{1}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha-\gamma}}{\frac{1}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha-\delta}} = (\delta\gamma\alpha\beta)$$

also auch

$$(\gamma\delta\alpha\beta) = \lambda = \frac{\gamma-\alpha}{\delta-\alpha} : \frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta} = \frac{\frac{1}{\gamma-\delta}((\gamma-\delta)) - (\alpha-\delta))\frac{1}{\alpha-\delta}}{\frac{1}{\gamma-\delta}((\gamma-\delta)) - (\beta-\delta))\frac{1}{\beta-\delta}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha-\delta} - \frac{1}{\gamma-\delta}}{\frac{1}{\beta-\delta} - \frac{1}{\gamma-\delta}} = \left(\frac{1}{\alpha-\delta}, \frac{1}{\beta-\delta}, \frac{1}{\gamma-\delta}\right).$$

Demnach ist in diesem Falle:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\beta\alpha\delta\gamma) = (\gamma\delta\alpha\beta) = (\delta\gamma\beta\alpha) = \lambda$$
$$(\alpha\gamma\beta\delta) = (\gamma\alpha\delta\beta) = (\beta\delta\alpha\gamma) = (\delta\beta\gamma\alpha) = 1 - \lambda$$
$$(\beta\alpha\gamma\delta) = (\alpha\beta\delta\gamma) = (\gamma\delta\beta\alpha) = (\delta\gamma\alpha\beta) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(\gamma\beta\alpha\delta) = (\beta\gamma\delta\alpha) = (\alpha\delta\gamma\beta) = (\delta\alpha\beta\gamma) = \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}$$
$$(\gamma\alpha\beta\delta) = (\alpha\gamma\delta\beta) = (\beta\delta\gamma\alpha) = (\delta\beta\alpha\gamma) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$(\beta\gamma\alpha\delta) = (\gamma\beta\delta\alpha) = (\alpha\delta\beta\gamma) = (\delta\alpha\gamma\beta) = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

106. Sätze: $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bleibt unverändert, wenn man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ersetzt durch $\alpha+\xi, \beta+\xi, \gamma+\xi, \delta+\xi$ oder durch $\alpha\xi, \beta\xi, \gamma\xi, \delta\xi$. Aber ersetzt man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$, so kommt

$$\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}} : \frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}} = \frac{1}{\alpha}(\gamma-\alpha)\frac{1}{\gamma}\cdot\left(\frac{1}{\beta}(\gamma-\beta)\frac{1}{\gamma}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\beta}(\delta-\beta)\frac{1}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\alpha}(\delta-\alpha)\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)^{-1}(\delta-\beta)(\delta-\alpha)^{-1}\alpha = \frac{1}{\alpha}(\alpha\beta\gamma\delta)\alpha$$

im allgemeinen nicht gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$, aber gleich $(\alpha\beta\gamma\delta)$, wenn hierfür C gilt. In diesem Fall ist also das Doppelverhältnis $(\alpha\beta\gamma\delta)$ eine „projektive Invariante", d. h. es bleibt ungeändert, wenn man auf $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dieselbe lineare gebrochene Substitution anwendet.

107. Definitionen: Ist $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$, so heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ „harmonisch"*) und es ist

$$\frac{1}{\alpha-\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta-\delta} + \frac{1}{\gamma-\delta}\right) \text{ oder } \left(\frac{1}{\alpha-\delta}, \frac{1}{\beta-\delta}, \frac{1}{\gamma-\delta}\right) = -1.$$

Ist $(\alpha\beta\gamma\delta) = -\varepsilon$ $(\varepsilon^2+\varepsilon+1=0)$, so heißen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ „äquian-

*) Von den Pythagoreern eingeführt. Vgl. M. Cantor, Geschichte der Mathematik I (Leipzig 1880) p. 140.

harmonisch"*) und es ist

$$\frac{1}{\alpha-\delta}+\frac{\varepsilon}{\beta-\delta}+\frac{\varepsilon^2}{\gamma-\delta}=0.$$

108. Sätze: Aus $\alpha, \beta, \delta, \lambda=(\alpha\beta\gamma\delta)$ ergibt sich γ im allgemeinen eindeutig (nach 104). Ebenso ergibt sich δ aus $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ im allgemeinen eindeutig.

Ferner ergibt sich α durch $\beta, \gamma, \delta, \lambda$ aus

$$\lambda=\frac{\frac{1}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\gamma}}{\frac{1}{\beta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\delta}}$$

(und 104), und β durch $\alpha, \gamma, \delta, \lambda$ aus

$$(\beta-\gamma)^{-1}(\beta-\delta)=(\alpha-\gamma)^{-1}\lambda(\alpha-\delta).$$

Demnach ist jede der 5 Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ durch die anderen vier eindeutig bestimmt, abgesehen vom Auftreten singulärer Nenner.

Insbesondere ist die vierte harmonische zu drei Zahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge eindeutig und die vierte äquianharmonische mit Berücksichtigung der Reihenfolge zweideutig bestimmt.

109. Satz: Zwei gegebene Paare haben ein eindeutig bestimmtes gemeinsames harmonisches Paar, wenn und nur wenn C gilt.

Beweis: Gilt C nicht und sucht man z. B. zu den reellen Paaren α, β und $\alpha'=+1, \beta'=-1$ das gemeinsame harmonische Paar $\gamma, \frac{1}{\gamma}$, so findet man die Gleichung $(\alpha+\beta)\gamma^2-2(\alpha\beta+1)\gamma+(\alpha+\beta)=0$, die nach 90 beliebig viele Wurzeln haben kann, wenn $(\alpha+\beta)^2-(\alpha\beta+1)^2=-(\alpha^2-1)(\beta^2-1)$ positiv ist.

Gilt C, so erhält man, $\gamma+\delta=2s$, $\gamma-\delta=2p$ gesetzt:

$$s=\frac{\alpha\beta-\alpha'\beta'}{\alpha+\beta-(\alpha'+\beta')}, \quad p^2=\frac{(\alpha-\alpha')(\alpha-\beta')(\beta-\alpha')(\beta-\beta')}{(\alpha+\beta-\alpha'-\beta')^2},$$

also genau ein Paar γ, δ aus $\gamma=s+p$, $\delta=s-p$ (auch wenn $\alpha+\beta-\alpha'-\beta'=0$ sein sollte).**)

Anmerkung: Sind $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ reell, dann auch γ, δ, wenn und nur wenn $p^2>0$, also wenn α und β entweder beide zwischen oder beide nicht zwischen α' und β' liegen.

110. Definition: Wenn

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^{-1}(\beta-\alpha')=(\alpha-\beta')(\gamma'-\beta')^{-1}(\gamma'-\alpha')$$

*) Cremona, Curve piane (1862) p. 27. H. Schröter, Math. Ann. 10 (1876) p. 420.

**) Vgl. z. B. R. Baltzer, Analytische Geometrie (Leipzig 1882) p. 17.

ist, so heißen die sechs Zahlen $\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha'\beta'\gamma' \end{Bmatrix}$ in dieser Ordnung „involutorisch“, oder $\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha'\beta'\gamma' \end{Bmatrix}$ eine „Involution“.*)

111. Sätze: Aus einer Involution $\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \\ \alpha'\beta'\gamma' \end{Bmatrix}$ gehen durch Vertauschungen der Paare $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \beta \\ \beta' \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{Bmatrix}$ im ganzen 6 Involutionen hervor. Aus jeder dieser sechs Involutionen gehen durch Vertauschungen der Zahlen eines Paares (α mit α' usw.) in jedesmal zwei Paaren je vier Involutionen hervor.

Beweis: Löst man in der definierenden Relation 110 die Klammern rechts und links auf, so kommt:

$$\alpha\left((\beta-\gamma)^{-1}+(\beta'-\gamma')^{-1}\right)\alpha'-\alpha\left((\beta-\gamma)^{-1}\beta+(\beta'-\gamma')^{-1}\gamma'\right)$$
$$-\left(\gamma(\beta-\gamma)^{-1}+\beta'(\beta'-\gamma')^{-1}\right)\alpha'+\gamma(\beta-\gamma)^{-1}\beta+\beta'(\beta'-\gamma')^{-1}\gamma'=0.$$

Diese Relation bleibt unverändert, wenn man β mit γ, β' mit γ' vertauscht; also ist auch $\begin{Bmatrix} \alpha\,\gamma\,\beta \\ \alpha'\gamma'\beta' \end{Bmatrix}$ eine Involution. Ebenso bleibt die Relation unverändert, wenn man β mit γ', γ mit β' vertauscht; also sind auch $\begin{Bmatrix} \alpha\,\gamma'\beta' \\ \alpha'\gamma\,\beta \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} \alpha\,\beta'\gamma' \\ \alpha'\beta\,\gamma \end{Bmatrix}$ Involutionen.

Durch Multiplikation von rechts mit

$$(\gamma'-\alpha')^{-1}(\gamma'-\beta'),\ \text{von links mit}\ (\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^{-1}$$

folgt aus der definierenden Relation 110:

$$(\beta-\alpha')(\gamma'-\alpha')^{-1}(\gamma'-\beta')=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^{-1}(\alpha-\beta'),$$

also sind auch Involutionen:

$$\begin{Bmatrix} \beta\,\gamma'\alpha' \\ \beta'\gamma\,\alpha \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \beta\,\alpha'\gamma' \\ \beta'\alpha\,\gamma \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \beta\,\gamma\,\alpha \\ \beta'\gamma'\alpha' \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \beta\,\alpha\,\gamma \\ \beta'\alpha'\gamma' \end{Bmatrix};$$

aus dem bisherigen oder noch durch Hinzuziehung der Relation

$$(\beta-\alpha')(\gamma'-\alpha')^{-1}(\gamma'-\beta')=(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)^{-1}(\alpha-\beta'),$$

die sich aus der definierenden durch Multiplikation von rechts mit $(\beta-\alpha')^{-1}(\beta-\gamma)$, von links mit $(\gamma'-\beta')(\alpha-\beta')^{-1}$ ergibt, folgen alle übrigen Involutionen des Satzes 111.

---

*) G. Desargues, Brouillon proiect (Paris 1639) Oeuvres (Paris 1864) I p. 119. — Der Sache nach schon Pappus bekannt; s. Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt ed. Hultsch, Vol. II. (Berlin 1877) p. 873.

112. Satz: Mit $\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix}$ ist $\begin{Bmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{Bmatrix}$ zugleich eine Involution im allgemeinen dann und nur dann, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ der Satz C gilt.

Beweis: Gilt erstens C, so sind die definierenden Relationen für $\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{Bmatrix}$ identisch.

Gilt zweitens C nicht, so ist z. B. im Quaternionensystem

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -j & 1+2i & \frac{1+i+j-ij}{2} \end{Bmatrix}$$

eine Involution, aber

$$\begin{Bmatrix} -j & 1+2i & \frac{1+i+j-ij}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{Bmatrix}$$

nicht; denn die definierende Relation ergibt:

$$ij = ji.$$

113. Satz: Jede der sechs Zahlen einer Involution ist durch die fünf übrigen rational, also im allgemeinen eindeutig bestimmt.

Beweis: Die definierende Relation 110 gibt z. B. für α die lineare Gleichung:

$$\alpha\left(((\beta-\gamma)^{-1}+(\beta'-\gamma')^{-1})\,\alpha'-((\beta-\gamma)^{-1}\beta+(\beta'-\gamma')^{-1}\gamma')\right)$$
$$=(\gamma(\beta-\gamma)^{-1}+\beta'(\beta'-\gamma')^{-1})\,\alpha'+\gamma(\beta-\gamma)^{-1}\beta+\beta'(\beta'-\gamma')^{-1}\gamma'.$$

114. Satz: Die Harmonie $(\alpha\beta\gamma\delta)=-1$ ist mit der Involution $\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \delta \end{Bmatrix}$ identisch.

Beweis:

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^{-1}(\beta-\alpha)=(\alpha-\beta)(\delta-\beta)^{-1}(\delta-\alpha)$$

ergibt:

$$(\beta-\alpha)^{-1}((\beta-\alpha)+(\alpha-\gamma))(\alpha-\gamma)^{-1}=(\delta-\alpha)^{-1}((\delta-\alpha)+(\alpha-\beta))(\alpha-\beta)^{-1}$$

$$\frac{1}{\alpha-\gamma}+\frac{1}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\delta-\alpha}$$

d. h.

$$\frac{2}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\gamma}+\frac{1}{\alpha-\delta}.$$

115. Satz: Zu fünf Zahlen kann man die sechste involutorische durch Harmonien im allgemeinen dann und nur dann finden, wenn C gilt.

Beweis: Gilt erstens C nicht, so erhält man z. B. aus „Vektoren“ $a+bi+cj$ durch Harmonien nur Vektoren, weil Summen, Differenzen, Reziproke $\left(\frac{1}{a+bi+cj}=\frac{a-bi-cj}{a^2+b^2+c^2}\right)$ von Vektoren wieder Vektoren sind, aber durch Involution z. B. zu $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$

$$\alpha'=-j,\ \beta'=1+2i \text{ die Quaternion } \frac{1+i+j-ij}{2}.$$

Gilt dagegen C, so findet man zu $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ die sechste involutorische Zahl γ', indem man der Reihe nach $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma'$ aus den fünf Harmonien ermittelt:

$$(\alpha\alpha'\gamma\gamma_1)=-1, \qquad (\beta\beta'\gamma\gamma_2)=-1,$$
$$(\alpha\alpha'\gamma_2\gamma_{21})=-1, \qquad (\beta\beta'\gamma_1\gamma_{12})=-1,$$
$$(\gamma\gamma'\gamma_{12}\gamma_{21})=-1.\text{*)}$$

116. Definition: Wenn die Doppelverhältnisse $(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha'\beta'\gamma'\delta')$ einander gleich sind, so heißen $\begin{Bmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta'\end{Bmatrix}$ in dieser Ordnung „projektivisch“, oder sie bilden eine „Projektivität“.**)

117. Satz: Die Involution $\begin{Bmatrix}\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma'\end{Bmatrix}$ ist mit der Projektivität $\begin{Bmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \alpha' \\ \alpha & \gamma' & \beta' & \alpha'\end{Bmatrix}$ identisch.

Beweis: $(\alpha\beta\gamma\alpha')=(\alpha\gamma'\beta'\alpha')$ gibt:

$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)^{-1}(\beta-\alpha')(\alpha-\alpha')^{-1}=(\alpha-\beta')(\gamma'-\beta')^{-1}(\gamma'-\alpha')(\alpha-\alpha')^{-1}$ usw.

118. Satz: Zu sieben Zahlen ergibt sich die achte projektivische im allgemeinen eindeutig.

Beweis folgt aus 108.

119. Satz: Zu sieben Zahlen kann die achte projektivische im allgemeinen dann und nur dann durch bloße Harmonien gefunden werden, wenn C gilt.

Beweis: Gilt C nicht, so ergibt sich das Behauptete aus der Projektivität:

$$\begin{Bmatrix}1 & 0 & -1 & -j \\ 1 & \frac{1+i+j-ij}{2} & 1+2i & -j\end{Bmatrix}$$

wie bei 115.

Gilt C, so siehe Wiener l. c. p. 672.

---

*) s. Wiener, Über die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften. Leipz. Akad. Ber. math.-phys. Kl. Bd. 43 (1891) p. 644, insbesondere p. 670.

**) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822).

Geordnete Zahlensysteme.

120. Definition: Ist ein Zahlensystem eine geordnete Gruppe, so heißt es ein „geordnetes Zahlensystem".

121. Definitionen: In einem linear geordneten Zahlensystem, soll statt a nach b, a vor b gesagt werden a „größer als" b $(a > b)$, a „kleiner als" b $(a < b)$, so zwar, daß die zwischen 1 und 0 bestehende Ordnungsbeziehung $1 > 0$ lautet. Die Zahlen > 0 heißen „positiv", die < 0 „negativ". Mit Rücksicht auf 52 und 102 kann statt $a > b$ auch $(a, b) > 0$ gesagt werden, ebenso $(a, b) = 0$ statt $a = b$.

In einem planar geordneten Zahlensystem soll statt a rechts (resp. links) (b, c) gesagt werden: $(a, b, c) > 0$*) (resp. < 0). Gehören a, b, c einer linear geordneten Teilmenge an, so soll $(a, b, c) = 0$ gesetzt werden.

In einem überplanar geordneten Zahlensystem soll statt a unter (resp. über) (b, c, d) gesagt werden $(a, b, c, d) > 0$*) (resp. < 0). Gehören a, b, c, d einer planar geordneten Teilmenge an, so soll $(a, b, c, d) = 0$ gesetzt werden.

122. Satz: In einem geordneten Zahlensystem bleibt die Ordnung bei Multiplikation aller Zahlen mit einer positiven rationalen Zahl ungeändert.

Beweis: Aus $(a, b, \ldots) > 0$ folgt $(0, b - a, \ldots) > 0$ und daraus folgt nach 55, resp. 61, resp. 67 für positive ganze k:

$$(0, kb - ka, \ldots) > 0, \text{ d. h. } (ka, kb, \ldots) > 0.$$

Also auch $\left(\frac{k}{h} a, \frac{k}{h} b, \ldots\right) > 0$, für positive ganze h. Im planaren Fall kann $\frac{k}{h}$ auch negativ sein. Im linearen und überplanaren Fall sind dann die Zeichen $>$ und $<$ zu vertauschen.

Folgerung: Ein geordnetes Zahlensystem ist dicht, denn es enthält $\frac{a+b}{2}$, resp. $\frac{a+b+c}{3}$, resp. $\frac{a+b+c+d}{4}$, wenn a, b, c, d Zahlen des Systems sind; und diese Zahlen liegen zwischen a, b, resp. zwischen a, b, c, resp. zwischen a, b, c, d. (s. 54, 60, 66.)

123. Satz: Der Grundsatz 52 für lineare Anordnung ist unabhängig von allen vorhergehenden Grundsätzen.

Beweis: Es seien $a, a', b, b', \ldots$ ganze Zahlen und die Brüche $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \ldots$ reduziert, von positivem Nenner und so geordnet, daß

*) Hier ist (a, b, c) resp. (a, b, c, d) natürlich nicht das Verhältnis resp. Doppelverhältnis.

$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'}$ heißt, wenn entweder a größer (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) als b oder $a = b$, a' größer als b' ist. Dann ist z. B. $\frac{3}{1} > \frac{2}{3}$, aber $\frac{3}{1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, denn $\frac{7}{2} < \frac{7}{6}$.

124. Satz: Der Grundsatz 52 für planare (ebenso für überplanare) Anordnung ist unabhängig von allen vorhergehenden Grundsätzen.

Beweis: Man nehme die Tripel reeller Zahlen (a, b, c), (mit $c > 0$) mit der Addition $(a, b, c) + (h, k, l) = (la + kb + hc,\ lb + kc,\ lc)$ und der Multiplikation $(a, b, c)\,(h, k, l) = (ah,\ bk,\ cl)$. Dann setze man:

$$((a, b, c),\ (a', b', c'),\ (a'', b'', c'')) > 0,$$

wenn entweder:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} > 0,$$

oder wenn:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} > 0$$

ist. Wählt man a, a', a'', b, b', b'' so, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} > 0$$

und dann c, c', c'' so, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} < 0$$

ist, so wird

$$((a, b, c),\ (a', b', c'),\ (a'', b'', c'')) > 0,$$

aber nach Addition von (h, k, l):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ la + kb + hc & la' + kb' + hc' & la'' + kb'' + hc'' \\ lb + kc & lb' + kc' & lb'' + kc'' \end{vmatrix}$$

$$= l^2 \begin{vmatrix} 1 & \ldots \\ a & \ldots \\ b & \ldots \end{vmatrix} + kl \begin{vmatrix} 1 & \ldots \\ a & \ldots \\ c & \ldots \end{vmatrix} + (k^2 - hl) \begin{vmatrix} 1 & \ldots \\ b & \ldots \\ c & \ldots \end{vmatrix} < 0$$

für hinreichend große k.

Größensysteme.

125. Definition: Ein geordnetes Zahlensystem heißt ein Größensystem, wenn das „multiplikative Anordnungsaxiom“ 126 gilt.

126. Grundsatz: Zwischen den Zahlen $a, b, c, \ldots$ bestehen dieselben oder die entgegengesetzten Ordnungsbeziehungen, wie zwischen den Zahlen

$$hak,\ hbk,\ hck,\ \ldots,$$

wo h, k beliebige Zahlen $\neq 0$ des Systems sind.

127. Satz: Aus 126 folgt B.

Beweis: Ist $a \neq 0$, $a' \neq 0$, so folgt aus (z. B.) $(0, a, \ldots) > 0$ nach 126: $(0, aa', \ldots) \gtrless 0$, also $aa' \neq 0$.

128. Definition: Ein Zahlensystem, in welchem alle Verknüpfungssätze gelten, heißt ein „gewöhnliches“ Zahlensystem. Gelten überdies die linearen Sätze der Anordnung 52, 126, so heißt das System ein „reelles“ Größensystem. Durch Hinzunahme der imaginären Einheit i (mit $i^2 + 1 = 0$, s. 91) entsteht aus einem reellen ein „imaginäres“ Größensystem. Dasselbe ist planar zu ordnen, indem man $(a' + a''i,$ $b' + b''i,\ c' + c''i) > 0$ setzt, wenn $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} > 0$ ist. Dann sind offenbar die planaren Grundsätze 52, 126 erfüllt.

129. Satz: Im Falle linearer Anordnung folgen 52 und 126 aus dem Satze: Zwischen $a, b, c, \ldots$ bestehen dieselben oder die entgegengesetzten Ordnungsbeziehungen, wie zwischen $a+h,\ b+h,\ c+h, \ldots$ und wie zwischen $ah,\ bh,\ ch, \ldots$

Beweis: Aus $a > 0 < 1$ folgt dann entweder:

$$ah > 0 < h \text{ oder } ah < 0 > h,$$

also aus:

$$a > 0,\ h > 0 \text{ folgt } ah > 0,$$

und aus:

$$a > 0,\ h < 0 \text{ folgt } ah < 0.$$

Aus $a < 0 < 1$ folgt entweder:

$$ah < 0 < h \text{ oder } ah > 0 > h,$$

also aus:

$$a < 0,\ h < 0 \text{ folgt } ah > 0,$$

und aus:

$$a < 0,\ h > 0 \text{ folgt } ah < 0.$$

Es ist $-1 < 0$; denn wäre erstens:

$$1 > -1 > 0,$$

so würde durch Addition von 1 und -1 folgen:

$$2 < 0 < 1 \text{ und } 0 < -2 < -1,$$

und aus

$$2 < 0 < -2$$

durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$:

$$1 > 0 > -1,$$

gegen die Annahme. Wäre zweitens

$$-1 > 1 > 0,$$

so würde ebenso:

$$0 < 2 < 1 \text{ und } -2 < 0 < -1,$$

und aus

$$-2 < 0 < 2, \quad -1 < 0 < 1$$

folgen, gegen die Annahme.

Aus $a > 0$, $-1 < 0$ folgt also $-a < 0$.

Aus $a > b$, $-h > 0$ folgt entweder:

$$a + h > b + h, \; 0 > h,$$

oder:

$$a + h < b + h, \; 0 < h,$$

also das erstere. Ebenso aus

$$a > b, \; 0 > -h$$

entweder:

$$a + h > b + h, \; h > 0,$$

oder:

$$a + h < b + h, \; h < 0,$$

also das erstere. Demnach folgt aus $a > b$ stets $a + h > b + h$, womit 52 bewiesen. Aus $a > b$, $h > 0$ folgt $a - b > 0$, $h > 0$, also $(a - b)h > 0$, $ah - bh > 0$, $ah > bh$. Ebenso $h(a - b) > 0$, $ha > hb$. Ebenso aus $a > b$, $h < 0$ folgt $ah < bh$, $ha < hb$; damit ist auch 126 bewiesen.

130. Satz: Das multiplikative Anordnungsaxiom 126 für lineare Anordnung ist unabhängig von allen vorhergehenden Grundsätzen einschließlich 52 und der Stetigkeit.

Beweis: Man ordne das System der imaginären Zahlen $a + a'i$ so, daß $a + a'i > b + b'i$ heißt, wenn entweder $a > b$, oder $a = b$, $a' > b'$ ist. Dann besteht offenbar 52, aber nicht 126, denn aus $i > 0 < 1$ folgt durch Multiplikation mit $i: -1 > 0 < i$, während (122) $-1 < 0$ ist.

131. Grundsatz der relativen Dichte:

D Eine geordnete Menge enthält ein gewöhnliches (s. 128) Größensystem als relativ dichte Teilmenge.

132. Satz: Gilt in einem linearen Größensystem der Grundsatz D, so folgt: Von jeder gegebenen Größe $\neq 0$ des Systems ist ein reelles Vielfaches größer als jede gegebene Größe; d. h. wenn $a \neq 0$, x gegebene Größen sind, so existiert eine reelle Größe k so, daß $ka > x$ ist.

Beweis: Liege zwischen x und $x + 1$ die reelle Größe h, und zwischen 0 und a die reelle Größe k, so folgt $x < h < h \frac{1}{k} a$.

133. Satz: C und D sind unabhängig von allen Grundsätzen der Verknüpfung, denen der linearen Anordnung und von der Stetigkeit.

Beweis: Man betrachte das System von Funktionen zweier Variabeln x und y, die A genügen:

$$a = a_0 x^{m_0} y^{n_0} + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + \cdots$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$, ganzzahligen Exponenten $m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots$ und so geordnet, daß das Glied $x^{m_h} y^{n_h}$ dem Gliede $x^{m_k} y^{n_k}$ vorangeht, wenn entweder $m_h < m_k$ oder wenn $m_h = m_k$, $n_h < n_k$ ist. Ferner sei

$$xy = \lambda y x^{*)},$$

wo λ eine gegebene reelle positive Zahl ist. Dann gilt zunächst C nicht, aber die übrigen Verknüpfungssätze und die Stetigkeit. Damit auch die Anordnungssätze 52 und 126 gelten, setze man $a' < a''$, wenn $a'' - a' > 0$, und man setze $a > 0$, wenn der erste Koeffizient $a_0 > 0$ ist. Nunmehr gelten offenbar 52, 126, also auch B (nach 127). Aber D gilt nicht; denn es gibt kein reelles Vielfaches von x größer als y, weil stets $kx - y < 0$ ist. Es muß noch gezeigt werden, daß in dem Systeme die Division ausführbar ist, d. h. nicht nur B gilt (s. o.), sondern auch die Reziproken existieren. Die Größe

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) x^m y^n,$$

wo die c_h nur von y abhängen, hat die Reziproke:

$$y^{-n} x^{-m} (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots),$$

wenn

$$c_0 d_0 = 1$$

$$c_0 d_1 + c_1 d_0' = 0,$$

$$c_0 d_2 + c_1 d_1' + c_2 d_0'' = 0$$

---

*) Man darf nicht (wie Hilbert, Grundlagen der Geom., 1899, p. 74) $\lambda = -1$ annehmen, da sonst die Anordnungsgrundsätze nicht erfüllt wären. In der zweiten Auflage setzt Hilbert $\lambda = 2$.

usw. ist, wo

$$xd = d'x,$$
$$x^2 d = d''x^2 \text{ usw.}$$

gesetzt ist.

Aus der ersten Gleichung $c_0 d_0 = 1$ ergibt sich ein analoges Gleichungssystem für die Koeffizienten der Reziproken d_0 von c_0, so daß man diese sukzessiv berechnen kann. Dann ergibt sich $d_0 = \frac{1}{c_0}$, woraus auch d_0', d_0'' usw. bekannt sind; demnach auch $d_1 = -c_1 d_0' d_0$ usw.

134. Satz: Aus den Grundsätzen der linearen Anordnung und denen der Verknüpfung folgt D und umgekehrt: C folgt aus den übrigen Grundsätzen der Verknüpfung, den Grundsätzen der linearen Anordnung und D.

Beweis: Gelten erstens alle Grundsätze außer D, und ist $a \neq b$, so liegt zwischen a und b die reelle (s. 128) Größe $\frac{a+b}{2}$ (s. 54), also gilt D.

Umgekehrt, gilt D und wäre z. B.

$$ab > ba > 0,$$

dann gäbe es eine reelle Größe k, so daß

$$ab > k > ba$$

wäre, woraus folgen würde:

$$\frac{1}{b} k > a > k \frac{1}{b},$$

also gäbe es eine reelle Größe h, so daß

$$\frac{1}{b} k > h > k \frac{1}{b},$$

wäre, woraus folgen würde:

$$\frac{1}{b} > \frac{h}{k} > \frac{1}{b},$$

was unmöglich ist.

135. Satz: In einem linearen Größensystem ist die Stetigkeit unabhängig von allen übrigen Sätzen einschließlich D und der Meßbarkeit.

Beweis: Das System der rationalen Zahlen.

136. Satz: In einem linearen Größensystem ist die Meßbarkeit unabhängig von allen übrigen Sätzen einschließlich D und der Stetigkeit.

Beweis: Das System der sämtlichen Größen von der Form:

$$a = a_0 x^{m_0} + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots,$$

wo $m_0 < m_1 < m_2 \ldots$, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reelle Zahlen, x eine reelle Größe ist, genügt allen Grundsätzen einschließlich A, B, C. Damit auch 52

und 126 gelten, setze man $a > b$, wenn $a - b > 0$, und man setze $a > 0$, wenn $a_0 > 0$ ist. Die Reziproken existieren nach der Festsetzung:

$$\frac{1}{1 + b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \cdots} = 1 - (b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \cdots) + (b_1 x^{n_1} + b_2 x^{n_2} + \cdots)^2 - \cdots.$$

Daß D gilt und Stetigkeit stattfindet, ist offenbar; Meßbarkeit dagegen besteht nicht; denn kein ganzes Vielfaches von x ist größer als 1, weil stets $1 - kx > 0$ ist.

137. Satz: In einem linearen Größensystem ist D, also (134) auch C*) abhängig von der Meßbarkeit.

Beweis folgt aus dem folgenden Satze 138.

138. Satz: In einem linear geordneten Zahlensystem ist das Archimedische Axiom 58 gleichwertig dem Satze: Sind a, b zwei verschiedene Zahlen, so liegt zwischen ihnen eine rationale Zahl d. h. das Zahlensystem enthält das System der rationalen Zahlen relativ dicht.

Beweis: Gilt dieser letztere Satz, so liege zwischen a und $0 < a$ die rationale Zahl $\frac{k'}{k}$, zwischen x (> 0) und $x + 1$ die rationale Zahl $\frac{h}{h'}$. Dann folgt $x < \frac{h}{h'} \leqq h \leqq hk' < hka$.

Gilt umgekehrt das Archimedische Axiom, so existiert die ganze Zahl k so, daß $k(x - a) > 1$ ist, alsdann die ganze Zahl H so, daß $H > ka > 0$ ist, woraus durch Teilung des Intervalls $0 \ldots H$ in die Teilintervalle $0 \ldots 1,\ 1 \ldots 2,\ \ldots,\ (H-1) \ldots H$ die Existenz einer ganzen Zahl h folgt, so daß

$$h > ka > h - 1$$

ist; dann folgt

$$kx > ka + 1 > h > ka,$$

also

$$x > \frac{h}{k} > a.$$

139. Satz: C und D sind unabhängig von allen übrigen Grundsätzen der Verknüpfung, denen der planaren Anordnung und von der Stetigkeit.

Beweis: Man betrachte dasselbe System von Funktionen wie in 133, aber mit imaginären Koeffizienten $a_h = b_h + ic_h$. Damit 52 und 126

*) Die Abhängigkeit des Satzes C von der Meßbarkeit beweist auf anderem Wege Hilbert (Grundlagen der Geometrie § 32). Daß auch Satz A aus der Meßbarkeit folgt, zeigt Hölder (Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. Leipz. Akad. Ber. math.-phys. Kl. 1901, p. 36). Das wesentliche obiger Deduktionen besteht darin, daß C nur von einem Teile der Meßbarkeit, nämlich nur von Satz D abhängt (134) und daß diese Abhängigkeit auch umgekehrt besteht.

gelten, setze man $(a, a', a'') > 0$, wenn der Koeffizient $\left[\frac{a''-a}{a'-a}\right]$ von i in der Entwicklung von $\frac{a''-a}{a'-a}$ im Sinne von 133 > 0 ist. Dann gelten offenbar 52 und 126.

C gilt nicht, wegen $xy = \lambda yx$, $\lambda \neq 1$, und D gilt nicht, da sonst (s. 140) C folgen würde. Auch die Vertauschungssätze 21 gelten, denn aus

$$\left[\frac{a''-a}{a'-a}\right] > 0 \text{ folgt } \left[\frac{a'-a}{a''-a}\right] < 0$$

und

$$\left[\frac{a''-a'}{a-a'}\right] = \left[1 - \frac{a''-a}{a'-a}\right] < 0.$$

140. Satz: Aus den Grundsätzen der Verknüpfung und denen der planaren Anordnung folgt D; und umgekehrt: C folgt aus den übrigen Grundsätzen der Verknüpfung, denen der planaren Anordnung und D.

Beweis: Gelten A, B, C, 52, 126 und ist $(a, b, c) > 0$, dann liegt (s. 60) die reelle Größe $\frac{a+b+c}{3}$ zwischen a, b, c, also gilt D.

Gilt umgekehrt C nicht, aber D, und wäre

$$ab \neq ba,$$

dann würde eine imaginäre (s. 128) Größe x existieren, so daß $(ab, ba, x) > 0$ (resp. < 0); denn wäre für alle imaginären Größen x immer $(ab, ba, x) = 0$, so bildeten dieselben eine lineare Teilmenge, was nicht der Fall ist (s. 145). Weiter existiert eine imaginäre Größe y, so daß

$$(ba, x, y) > 0,$$
$$(x, ab, y) > 0,$$

also

$$\left(a, \frac{1}{b}x, \frac{1}{b}y\right) > 0$$

und

$$\left(x\frac{1}{b}, a, y\frac{1}{b}\right) > 0,$$

gegen 21; denn es ist

$$\frac{1}{b}x = x\frac{1}{b},$$

denn sonst würde (z. B.) eine imaginäre Größe z existieren, so daß

$$\left(\frac{1}{b}x, x\frac{1}{b}, z\right) > 0,$$

also eine imaginäre Größe t, so daß

$$\left(x\,\frac{1}{b},\ z,\ t\right) > 0,$$

$$\left(z,\ \frac{1}{b}\,x,\ t\right) > 0,$$

also

$$\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{x}\,z,\ \frac{1}{x}\,t\right) > 0$$

und

$$\left(\frac{z}{x},\ \frac{1}{b},\ \frac{t}{x}\right) > 0,$$

gegen 21; denn $\frac{z}{x} = \frac{1}{x}\,z,\ \frac{t}{x} = \frac{1}{x}\,t.$

141. Satz: In einem planaren Größensystem ist die Stetigkeit unabhängig von allen übrigen Sätzen einschließlich D und der Meßbarkeit.

Beweis: Das System der Zahlen $a + bi$, wo a, b rationale Zahlen sind.

142. Satz: In einem planaren Größensystem ist die Meßbarkeit unabhängig von allen übrigen Sätzen einschließlich D und der Stetigkeit.

Beweis: Das in 136 verwendete Größensystem, aber mit imaginären Zahlenkoeffizienten, genügt allen Grundsätzen der Verknüpfung; ferner denen der planaren Anordnung, wenn man $(abc) > 0$ setzt, falls der Koeffizient des in x niedrigsten Gliedes des Faktors von i in $\frac{b-c}{a-c}$ größer als 0 oder der in $\frac{a-c}{b-c}$ kleiner als 0 ist. Meßbarkeit dagegen besteht nicht, denn es ist stets

$$(x,\ k \cdot 1,\ k \cdot i) > 0$$

für jede positive ganze Zahl k.

143. Satz: In einem planaren Größensystem ist D abhängig von der Meßbarkeit.

Beweis folgt aus dem folgenden Satze 144.*)

144. Satz: In einem planar geordneten Zahlensystem ist das Archimedische Axiom gleichwertig dem Satze: Sind a, b, c drei nicht einem linear geordneten Teilsystem angehörende Zahlen, so liegt zwischen ihnen eine rationale imaginäre Zahl, d. h. das Zahlensystem enthält das System der rationalen imaginären Zahlen relativ dicht.

Beweis ähnlich wie zu 138.*)

---

*) Von diesen Sätzen wird später kein Gebrauch gemacht, weshalb die Beweise hier übergangen werden.

145. Satz: Ein gewöhnliches imaginäres (d. h. i enthaltendes) Zahlensystem ist nicht linear zu ordnen.

Beweis: Setzt man $i > 0$ oder < 0, so folgt durch Multiplikation mit i in beiden Fällen $-1 > 0$, was unmöglich ist.

146. Satz: Ein gewöhnliches imaginäres Zahlensystem ist nicht überplanar zu ordnen.

Beweis: Es bestimmen $0, 1, i$ ein planares Teilsystem, da sie (nach 145) keinem linearen Teilsystem angehören können. Da nicht alle Zahlen des Systems diesem planaren Teilsystem angehören sollen, sei a eine von den nicht dazu gehörigen. Dann bestimmen $0, 1, i, a$ ein überplanares (eigentliches oder uneigentliches) Teilsystem, in welchem z. B.

$$(0, 1, i, a) > 0$$

ist. Dann folgt entweder:

$$(0, i, -1, ia) > 0,$$

oder es folgt:

$$(0, i, -1, ia) < 0,$$

je nachdem, ob i zu den Multiplikatoren gehört, welche die Ordnung erhalten oder zu denen, welche sie umkehren. Die nochmalige Multiplikation mit i ergibt in beiden Fällen

$$(0, -1, -i, -a) > 0$$

gegen 65.

147. Satz: In einem gewöhnlichen reellen Größensystem kann die Existenz der Quadratwurzeln aus positiven Größen ohne Benutzung der Meßbarkeit bewiesen werden.

Beweis: Es sei $a > 0$ (und < 1, da man sonst $\frac{1}{a}$ nehmen könnte*)); dann ist $x^2 - a$ für alle nichtnegativen Größen x eines relativ dichten Teilsystems des Systems teils negativ (wie für $x = 0$), teils nichtnegativ (wie für $x = 1$). Man bezeiche mit $\underline{x}$ die ersteren Größen, für welche $\underline{x}^2 - a < 0$, mit $\bar{x}$ die letzteren, für welche $\bar{x}^2 - a \geqq 0$, und definiere eine Größe x durch die Ungleichungen $\underline{x} < x \leqq \bar{x}$.

Diese sind zulässig, da die aus ihnen folgenden $\underline{x} < \bar{x}$ richtig sind. Denn aus $\underline{x} \geqq \bar{x}$ würde $0 > \underline{x}^2 - a \geqq \bar{x}^2 - a > 0$ folgen.

Die Bestimmung von x ist nach 18 eindeutig, da die Größen $\underline{x}$, $\bar{x}$ relativ dicht liegen.

---

*) Nachdem für $a < 1$ die Existenz von $\sqrt{a}$ nachgewiesen, kann für $a > 1$ $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}}$ gesetzt werden, denn es ist in der Tat $\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$.

Schließlich genügt x der Gleichung $x^2 - a = 0$. Denn wäre etwa $x^2 - a < 0$, so wähle man für α die kleinere der beiden Zahlen $\frac{a}{x^2} - 1$ oder 3, ferner $0 < \xi < \frac{\alpha}{3}$ und $\underline{x} = (1 + \xi)x$, so wird erstens

$$\underline{x}^2 = (1 + 2\xi + \xi^2)x^2 < \frac{a}{x^2} \cdot x^2, \quad \text{d. h.} \quad \underline{x}^2 - a < 0$$

und zweitens

$$\underline{x} = (1 + \xi)x > x,$$

gegen die Bestimmung von x. Ebenso würde man $x^2 - a > 0$ widerlegen, am einfachsten durch Zurückführung auf den eben erledigten Fall, vermittelst der Reziproken $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$, usw.

Zusatz: Quadratwurzeln aus negativen und aus imaginären Größen werden durch die Formeln

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \quad \text{und} \quad \sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

auf Quadratwurzeln aus reellen positiven Größen zurückgeführt. Rechnungsgesetze, wie $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ sind durch Identitäten, wie

$$(xy)^2 - ab = \frac{1}{2}(x^2 - a)(y^2 + b) + \frac{1}{2}(x^2 + a)(y^2 - b),$$

zu beweisen. Aus $x^4 = (x^2)^2$ folgt $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$, usw.

143. Satz: In einem gewöhnlichen reellen Größensystem gibt es positive Größen x, für welche eine ganze Funktion

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

mit reellen Koeffizienten und $a_n < 0$ negativ wird.

Beweis: Es sei A größer als jede der Größen $\pm a$, $\pm a_1$, ..., $\pm a_n$, ferner

$$0 < x < \frac{-a_n}{nA},$$

so folgt

$$\begin{aligned} ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n &< a_n + A(x + x^2 + \cdots + x^n) \\ &< a_n + Anx < 0. \end{aligned}$$

149. Satz: In einem gewöhnlichen reellen Größensystem gibt es sowohl Größen $\underline{x}$, für welche und unterhalb welcher eine ganze Funktion

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

ungeraden Grades n, mit reellen Koeffizienten, negativ, als solche $\bar{x}$, für welche und oberhalb welcher dieselbe Funktion positiv wird.

Beweis: Man wähle $\underline{x} < -nA$ (s. 148); ebenso $\bar{x} > nA$, dann folgt:

$$\underline{x}^n + a_1\underline{x}^{n-1} + \cdots + a_n < \underline{x}^n + An\underline{x}^{n-1} \text{ d. h. } < \underline{x}^{n-1}(\underline{x} + nA) < 0$$

und

$$\bar{x}^n + a_1\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_n > \bar{x}^n - An\bar{x}^{n-1} \text{ d. h. } > \bar{x}^{n-1}(\bar{x} - nA) > 0.$$

150. Satz: In einem gewöhnlichen reellen Größensystem kann die Existenz einer reellen Wurzel einer reellen Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ungeraden Grades n ohne Voraussetzung der Meßbarkeit nachgewiesen werden.

Beweis: Man bezeichne mit $\underline{x}$ alle diejenigen Größen eines relativ dichten Teilsystems des Systems, für welche

$$f(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \leqq \underline{x}$$

ist; und mit $\bar{x}$ alle übrigen Größen des relativ dichten Teilsystems des Systems. Dann definiere man eine Größe x durch die Ungleichungen

$$\underline{x} < x \leqq \bar{x}.$$

Diese Definition ist zulässig, da erstens sowohl Größen $\underline{x}$ wie $\bar{x}$ existieren (nach 149*)), und da zweitens stets $\underline{x} < \bar{x}$ ist, wie aus der Definition der $\underline{x}$ und $\bar{x}$ folgt. Die Definition von x ist (nach 18) eindeutig, da die Größen $\underline{x}$, $\bar{x}$, relativ dicht liegen. Schließlich ist $f(x) = 0$; denn wäre etwa $f(x) < 0$, so kann man nach 148 $\underline{x} - x > 0$ so bestimmen, daß

$$f(\underline{x}) = f(x) + (\underline{x} - x)f_1 + (\underline{x} - x)^2 f_2 + \cdots + (\underline{x} - x)^n f_n$$

negativ wird, gegen die Bestimmung von x.

151. Satz: In einem imaginären Zahlensystem kann die Existenz einer Wurzel einer Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ohne Voraussetzung der Meßbarkeit bewiesen werden.

Beweis: Es genügt zu diesem Zwecke, den zweiten Gaußschen Wurzelexistenzbeweis**) auf den vorliegenden Fall nicht meßbarer Größensysteme zu übertragen. In der Tat erfordert dieser Beweis außer formalen algebraischen Operationen, welche von der Meßbarkeit

*) Die dort mit $\underline{x}$ bezeichneten Größen stimmen mit den hier mit $\underline{x}$ bezeichneten Größen überein; nicht dasselbe gilt für die $\bar{x}$.

**) Gauß' Werke Bd. III, p. 31. E. Netto, Die vier Gaußschen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Faktoren ersten oder zweiten Grades (Leipzig 1890) p. 37.

nicht berührt werden, nur noch die Existenz der Quadratwurzel (147) und die Wurzelexistenz reeller Gleichungen ungeraden Grades (150).

Zusätze: Ist x_1 eine Wurzel von $f(x)$, so ist

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{x^n-x_1^n}{x-x_1}+\cdots$$

eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x. Demnach zerfällt $f(x)$ in ein Produkt von n (gleichen oder verschiedenen) Linearfaktoren $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, woraus mit Rücksicht auf B folgt, daß $f(x)$ höchstens n Wurzeln hat.

152. Satz: Ein gewöhnliches, i enthaltendes Zahlensystem S ist ein imaginäres Zahlensystem, d. h. es enthält keine andern Zahlen als solche von der Form $a+bi$, wo a, b Größen eines reellen Systems sind.*)

Beweis: Es bezeichne R das „vollständige" reelle Teilsystem des Systems S, d. h. dasjenige, welches durch Hinzunahme keiner weiteren Zahl des Systems S vergrößert werden kann, ohne seine Eigenschaft der linearen Anordnung zu verlieren. Ferner bezeichne J das aus R durch Hinzunahme von i entstehende imaginäre Teilsystem des Systems S. Angenommen, es enthielte S eine nicht in J enthaltene Zahl x, so muß es sich als unmöglich herausstellen, die Zahl x in das planar geordnete System J einzuordnen. Die Anordnungsbeziehungen in S lassen sich vermittelst 52, 126 auf die Form bringen

$$(0,\ 1,\ a+bi)>0,$$

die unter sich widerspruchslos sind. Dasselbe gilt für die x enthaltenden Beziehungen, die auf die Form zu bringen sind:

$$(0,\ 1,\ f(x))>0,$$

wo $f(x)$ rationale Funktionen mit Koeffizienten aus J sind. Diese sind unter sich widerspruchslos, andernfalls ein Widerspruch schon zwischen denjenigen dieser Beziehungen bestehen müßte, welche für x willkürlich festgesetzt sind, aus denen alle übrigen folgen. Demnach könnte ein Widerspruch nur zwischen einer der Beziehungen

$$(0,\ 1,\ a+bi)>0$$

und einer der Beziehungen

$$(0,\ 1,\ f(x))>0$$

*) Dieser Satz besagt mehr als der entsprechende von Weierstraß, da hier nicht die Meßbarkeit und nicht die Darstellbarkeit der Zahlen durch eine endliche Anzahl von Einheiten vorausgesetzt wird.

bestehen, was nicht anders möglich ist, als daß $f(x)$ einen der Werte $a+bi$ hätte. Dann hätte aber x (nach 151) selbst die Form $y+iz$, wo y, z reelle d. h. dem System R einzuordnende Zahlen wären, gegen die Annahme.

153. Demnach sind die Zahlen gewöhnlicher Systeme entweder reell, d. h. linear zu ordnen, oder von der Form $a+bi$, mit reellen a, b, also (nach 128) planar zu ordnen. Ein nicht reelles gewöhnliches Zahlensystem braucht i nicht zu enthalten; z. B. ist das System $a+b\sqrt{-3}$, mit rationalen a, b, ein System dieser Art. Ist aber das vollständige reelle Teilsystem stetig, so enthält das System i selbst.

154. Satz: Die sämtlichen Grundsätze der Verknüpfung, der Stetigkeit, der Meßbarkeit sind unter sich und mit den Grundsätzen der linearen bzw. planaren Anordnung nicht im Widerspruch.

Beweis: Die Existenz des reellen bzw. imaginären Zahlensystems.

155. Satz: Die Grundsätze der Verknüpfung, der Stetigkeit, der Meßbarkeit, der linearen bzw. planaren Anordnung bilden ein „vollständiges" System von Grundsätzen für das System der reellen bzw. der imaginären Zahlen, d. h. alle Eigenschaften dieser Systeme sind aus diesen Grundsätzen herzuleiten.

Beweis: Gäbe es irgend eine weitere Grundeigenschaft E dieser Systeme, welche von den aufgestellten unabhängig wäre, so wäre die zu E entgegengesetzte Eigenschaft non-E mit den übrigen nicht in Widerspruch, d. h. es existierten Systeme, welche diese Grundeigenschaften in sich vereinigten. Dies ist nicht der Fall. Denn das System enthält zunächst die Zahlen 0, 1 resp. 0, 1, i, alsdann infolge der Verknüpfungssätze alle rationalen reellen resp. imaginären Zahlen, ferner infolge der Anordnung und Stetigkeit alle irrationalen reellen resp. imaginären Zahlen. Könnte man nun das reelle System durch eine Zahl x erweitern, die man > 0 annehmen, nämlich sonst durch $-x$ ersetzen kann, so müßte, damit x von allen übrigen Zahlen des Systems verschieden wäre, entweder x größer als jede der andern Zahlen sein, entgegen der Meßbarkeit; oder es müßte x größer als jede Zahl $< a$, und kleiner als jede Zahl $> a$ sein, für eine bestimmte Zahl a; dann ist entweder, da $x \neq a$ sein soll,

$$a < x < a + \frac{1}{k} \quad \text{oder} \quad a - \frac{1}{k} < x < a,$$

also entweder

$$\frac{1}{x-a} > k \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a-x} > k,$$

für jede ganze Zahl k, gegen die Meßbarkeit.

Könnte man das imaginäre System durch eine Zahl $x + iy$ mit reellen x, y (s. 152) erweitern, so gäbe es für

$$(0,\ a + bi,\ a' + b'i) \neq 0, \quad \text{d. h.} \quad \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

stets eine ganze Zahl k, so daß

$$(x + yi,\ k(a + bi),\ k(a' + b'i)) > 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & ka & ka' \\ y & kb & kb' \end{vmatrix} > 0, \quad \text{d. h.} \quad k(ab' - a'b) - x(b' - b) - y(a - a') > 0$$

folgen würde. Daraus ergäbe sich aber für $a = a'$, $b \neq b'$ die Meßbarkeit von x, für $a \neq a'$, $b = b'$ die Meßbarkeit von y, so daß es, entgegen dem vorher Bewiesenen, reelle meßbare Zahlen gäbe, die sich dem System der rellen Zahlen hinzufügen ließen.

II.

Projektive Geometrie.

Erste Hälfte.



Die Sätze der Verknüpfung.

1. Grundbegriff ist „Punkt“.

Es wird kein weiterer Grundbegriff eingeführt, wodurch der Forderung nach einem Minimum von Grundbegriffen sicher genügt wird. Denn wenigstens ein Grundbegriff muß der Geometrie eigentümlich sein.

2. Grundsätze: Es gibt wenigstens einen Punkt A und wenigstens einen von A verschiedenen Punkt B.

Diese Grundsätze entsprechen, wie auch die später aufzustellenden, der Forderung, ein Minimum des Inhalts zu haben.

3. Je nachdem, ob P und Q zwei gleiche oder verschiedene Punkte sind, soll gesetzt werden $PQ = 0$ oder $PQ \neq 0$.

4. Definition: Sind A und B irgend zwei verschiedene Punkte, so zerfallen alle existierenden Punkte, einschließlich A und B, in zwei Klassen $(AB)_0 = (BA)_0$ und $(AB)_1 = (BA)_1$, derart daß die Klasse $(AB)_0$ den Punkt A, also wegen der Festsetzung $(AB)_0 = (BA)_0$ auch den Punkt B enthält; daß, wenn C zu $(AB)_h$ gehört, auch A zu $(BC)_h$, also auch B zu $(AC)_h$ gehört. Bezeichnet man die Zugehörigkeit von C zu $(AB)_0$ mit $ABC = 0$, die Zugehörigkeit von C zu $(AB)_1$ mit $ABC \neq 0$, so folgt aus dem vorhergehenden, daß in $ABC = 0$ oder $\neq 0$ alle Permutationen von A, B, C gestattet sind und daß z. B. aus $AB = 0$ auch $ABC = 0$ folgt. Die Klasseneinteilung soll ferner die folgenden beiden Haupteigenschaften haben: Ist $ABC = 0$, so sind für jeden Punkt D stets ABD, BCD, ACD zugleich $= 0$ oder $\neq 0$; ist $ABC \neq 0$, so sind für keinen Punkt D jemals ABD, BCD, ACD zugleich $= 0$. Die Gesamtheit der Punkte der Klasse $(AB)_0$ heißt „Gerade“ $[AB]$.

5. Satz: Sind C und D zwei verschiedene Punkte von $[AB]$, dann ist jeder Punkt von $[AB]$ auch Punkt von $[CD]$.

Beweis: Ist E irgend ein Punkt von $[AB]$, also $ABC = ABD$

$= ABE = 0$, so folgt (4) aus $ABC = ABE = 0$, daß auch $BCE = 0$, aus $ABD = ABE = 0$, daß auch $BDE = 0$, aus $BCE = BDE = 0$, daß auch $CDE = 0$, d. h. E ein Punkt von $[CD]$ ist.

6. Satz: Sind C und D zwei verschiedene Punkte von $[AB]$, dann ist jeder Punkt von $[CD]$ auch Punkt von $[AB]$.

Beweis: Nach 5 sind alle Punkte von $[AB]$, also speziell A und B Punkte von $[CD]$; also nach 5, wenn A, B mit C, D vertauscht werden: alle Punkte von $[CD]$ auch Punkte von $[AB]$.

7. Definition: Zwei solche Geraden heißen „identisch", $[AB] = [CD]$, sonst „verschieden" $[AB] \neq [CD]$.

8. Grundsatz: **Es gibt einen Punkt, der nicht zu der Geraden gehört, welche durch die beiden nach 2 existierenden verschiedenen Punkte bestimmt ist.**

9. Definition: Sind A, B, C irgend drei Punkte, für welche $ABC \neq 0$ ist, so soll die Gesamtheit der Punkte D, für welche ein Punkt E existiert, so daß $ABE = CDE = 0$ ist, „Ebene" $\{ABC\}$ heißen.

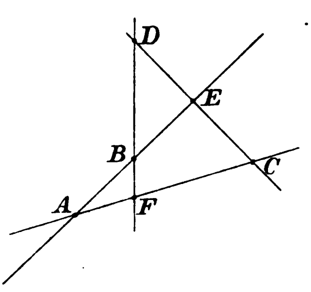
10. Satz: Es ist $\{ABC\} = \{BAC\}$.

Beweis: Ist D ein Punkt von $\{ABC\}$, existiert also E derart, daß $ABE = CDE = 0$ ist, dann ist (nach 4) auch $BAE = CDE = 0$, d. h. (nach 9) D ein Punkt von $\{BAC\}$.

11. Grundsatz: **Existiert zu A, B, C, D ein Punkt E derart, daß $ABE = CDE = 0$ ist, so existiert auch ein Punkt F derart, daß $ACF = BDF = 0$ ist. Also existiert auch ein Punkt G derart, daß $BCG = ADG = 0$ ist.***)

) Dies ist der Satz, der in der Euklidischen Geometrie als Grundeigenschaft der Ebene stillschweigend vorausgesetzt wird, wie schon Gauß hervorhebt (Werke, Bd. VIII p. 162. 189. 194. 200. 224). Die Versuche von Wolfgang Bolyai, Lobatschefsky und anderen, die Definition der Ebene auf die der Kugel zu gründen, gehen auf Leibniz zurück (s. Leibniz' Characteristica geometrica. Math. Schriften hrsg. v. Gerhardt, Berlin 1849, Bd. 5). Eine solche Definition setzt den Begriff des Maßes voraus, darf also bei einem reinen Aufbau der projektiven Geometrie nicht verwendet werden. Dasselbe gilt für diejenigen Definitionen der Ebene, die den rechten Winkel verwenden (Deahna, Demonstratio theorematis, esse superficiem planam. Dissert. inaug. Marburg 1837. Crelle, J. f. Math. 45 p. 15. Gerling, J. f. Math. 20 p. 332. Erb, Die Probleme der Geraden usw., Heidelberg 1846. Duhamel, Des méthodes dans les sciences de raisonnement 1866. De Tilly, Mém. cour. Bruxelles 1870, Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique [2] 30 [1870] p. 28, 36 p. 124, [3] 14 [1887], Bull. de Darboux III [1872] p. 131. Essai sur les princ. fond. de la géom. et de la méc. Bordeaux 1879). Graßmanns Meinung (s. Werke I, p. 64)), daß mit der Schwierigkeit der Definition der Ebene zugleich die des Parallelen-Axioms überwunden wäre, ist irrig. Dagegen ist nach Annahme des Parallelen-Axioms die Existenz der Ebene beweisbar (s. Veronese, Grundzüge der Geometrie p. 332, p. 417 Anm.).

Dieser Satz ist unabhängig von den vorhergehenden Grundsätzen und Definitionen. Denn man bezeichne z. B. als „Punkte“ die Quadrupel von vier teilerfremden ganzen Zahlen (x, y, z, t), die nicht alle 0 und deren letzte, t, gleich 0 oder 1 ist. Ein Quadrupel (kx, ky, kz, kt) definiere für alle ganzen Zahlen $k \neq 0$ denselben Punkt. Als „Gerade“ der „Punkte“ (x, y, z, t), (x', y', z', t') bezeichne man die Gesamtheit der in $(kx + k'x', ky + k'y', kz + k'z', kt + k't')$ für alle ganzen Zahlen k, k' enthaltenen „Punkte“. Dann bestehen offenbar die Grundsätze und Definitionen 2, 4, 7, 8, 9, aber nicht 11, da z. B. die Punkte $A = (0001)$, $B = (1101)$, $C = (1301)$, $D = (3101)$, $E = (2201)$, $F = (1303)$ wie in 11 liegen, aber F kein „Punkt“ in dem hier festgesetzten Sinne ist (s. Fig.)



12. Satz: Es ist $\{ABC\} = \{ACB\}$.

Beweis: Ist D ein Punkt von $\{ABC\}$, existiert also E, so daß $ABE = CDE \doteq 0$ ist, so ist D auch Punkt von $\{ACB\}$, denn es existiert (nach 11) ein Punkt F so, daß $ACF = BDF = 0$ ist.

13. Satz: In $\{ABC\}$ sind alle Permutationen gestattet.

Beweis aus 10 und 12.

14. Satz: $\{ABC\}$ enthält $[AB]$.

Beweis: Ist D ein Punkt von $[AB]$, also $ABD = 0$, dann ist $ABE = CDE = 0$ für $E = D$, also D ein Punkt von $\{ABC\}$.

Folgerung aus 4, 13, 14: $\{ABC\}$ enthält $[BC]$, $[AC]$, A, B, C.

15. Satz: Ist D ein Punkt von $\{ABC\}$, dann C von $\{ABD\}$.

Beweis: Es existiert E so, daß $ABE = CDE = 0$ ist, also auch so, daß $ABE = DCE = 0$ ist, d. h. C liegt in $\{ABD\}$.

Folgerungen: 1) Es liegt auch B in $\{ACD\}$, A in $\{BCD\}$. Bezeichnet man diese Lage mit $ABCD = 0$, so sind hierin also alle Permutationen gestattet.

2) aus 14: wenn $ABD = 0$, dann $ABCD = 0$.

16. Satz: Sind D, E Punkte von $\{ABC\}$, dann A von $\{CDE\}$.

Beweis: Es existieren (9) F und G so, daß $CDF = ABF = 0$, $CEG = ABG = 0$ ist. Also ist (7) $[AG] = [AB]$, $[CG] = [CE]$, also $DCF = AGF = 0$, und (11) $DAH = CGH = CEH = 0$, d. h. A Punkt von $\{CDE\}$.

17. Satz: Sind D, E, F drei Punkte von $\{ABC\}$ und $DEF \neq 0$, dann ist jeder Punkt G von $\{ABC\}$ Punkt von $\{DEF\}$.

Beweis: Aus $ABCD = ABCE = 0$ folgt (16) $ABDE = 0$, aus

$ABCD = ABCG = 0$ ebenso $ABDG = 0$, aus $ABCD = ABCF = 0$, ebenso $ABDF = 0$; also aus $ABDE = ABDG = 0$, $ADEG = 0$, und aus $ABDE = ABDF = 0$, $ADEF = 0$; schließlich aus $ADEG = ADEF = 0$, $DEFG = 0$, d. h. G Punkt von $\{DEF\}$; q. e. d.

18. Satz: Sind D, E, F drei Punkte von $\{ABC\}$ und $DEF \neq 0$, dann ist jeder Punkt von $\{DEF\}$ Punkt von $\{ABC\}$.

Beweis: Nach 17 sind alle Punkte von $\{ABC\}$, also auch (14) A, B, C Punkte von $\{DEF\}$, also (16): jeder Punkt von $\{DEF\}$ Punkt von $\{ABC\}$.

19. Definition: Zwei solche Ebenen heißen „identisch“, $\{ABC\} = \{DEF\}$, sonst „verschieden“ $\{ABC\} \neq \{DEF\}$.

20. Satz: Liegen zwei Punkte D, E einer Geraden $[DE]$ in einer Ebene $\{ABC\}$, dann liegt jeder Punkt der Geraden in dieser Ebene.

Beweis: Von A, B, C ist wenigstens ein Punkt von D und E verschieden. Bezeichnen wir einen derselben mit F, so liegen D, E, F, also (18) jeder Punkt von $\{DEF\}$, also (14) insbesondere jeder Punkt von $[DE]$ in $\{ABC\}$.

21. Satz: Es gibt genau eine Ebene, die eine Gerade $[BC]$ und einen nicht in ihr liegenden Punkt enthält.

Beweis: Nach 14 hat die Ebene $\{ABC\}$, nach 20 und 9 nur diese die verlangten Eigenschaften.

22. Satz: Zwei verschiedene Gerade $[AB]$, $[CD]$ einer Ebene schneiden sich in einem, also (5) nur einem Punkte.

Beweis: Da D in $\{ABC\}$ liegt, existiert (nach 9) E so, daß $ABC = CDE = 0$ ist.

23. Satz: Zwei durch einen Punkt A gehende verschiedene Gerade $[AB]$, $[AC]$ bestimmen genau eine sie enthaltende Ebene.

Beweis: Nach 14 hat die Ebene $\{ABC\}$, nach 20 und 9 nur diese die verlangten Eigenschaften.

24. Grundsatz: Es gibt einen Punkt, der nicht in der Ebene liegt, welche durch die nach 2 und 8 existierenden drei Punkte bestimmt ist.

25. Definition: Ist $ABCD \neq 0$, d. h. D nicht in $\{ABC\}$ und $ABC \neq 0$, so heißt die Gesamtheit der Punkte E, für welche ein Punkt F existiert, so daß $ABCF = DEF = 0$ ist, „Raum“ $|ABCD|$.

26. Satz: In $|ABCD|$ dürfen die drei ersten Buchstaben permutiert werden, d. h. es ist $|ABCD| = |ACBD|$ usw.

Beweis: Aus 25 und 15 Folg. 1.

27. Satz: Existiert zu A, B, C, D, E ein Punkt F so, daß $ABCF = DEF = 0$ ist, dann existiert auch G so, daß $ABDG$

$= CEG = 0$ ist; also auch H und I so, daß $ACDH = BEH = BCDI = AEI = 0$ ist.

Beweis: Weil $ABCF$ in einer Ebene, so existiert K so, daß $CFK = ABK = 0$ ist. Aus $CKF = DEF = 0$ folgt (11) die Existenz von G so, daß $DKG = CEG = 0$. Nun liegt G auf $[DK]$, D auf $\{ABD\}$, K auf $[AB]$, also auf $\{ABD\}$; also $[DK]$, also G auf $\{ABD\}$ (s. 20), d. h. $ABDG = 0$; außerdem war $CEG = 0$.

28. Satz: Es ist $|ABCD| = |ABDC|$.

Beweis: Sei E ein Punkt von $|ABCD|$, also existiert F so, daß $ABCF = DEF = 0$, so ist E auch Punkt von $|ABDC|$, denn es existiert (25) G so, daß $ABDG = CEG = 0$ ist.

29. Satz: In $|ABCD|$ sind alle Permutationen gestattet.

Beweis: Aus 26 und 28.

30. Satz: $|ABCD|$ enthält $\{ABC\}$.

Beweis: Ist E ein Punkt von $\{ABC\}$, also $ABCE = 0$, so ist $ABCF = DEF = 0$ für $F = E$, d. h. E ein Punkt von $|ABCD|$.

Folgerungen aus 14, 29, 30: $|ABCD|$ enthält $\{ABD\}$, $\{ACD\}$, $\{BCD\}$, $[AB]$, $[AC]$, usw., A, B, C, D.

31. Satz: Liegt E in $|ABCD|$, dann D in $|ABCE|$.

Beweis: Es existiert F so, daß $ABCF = DEF = 0$ ist, also auch so, daß $ABCF = EDF = 0$ ist, d. h. D ist in $|ABCE|$.

Folgerungen: 1) aus 31 und 29. Liegt E in $|ABCD|$, dann auch C in $|ABDE|$, B in $|ACDE|$, A in $|BCDE|$. Bezeichnet man diese Lage mit $ABCDE = 0$, so sind hier also alle Permutationen gestattet.

2) aus 30: Wenn z. B. $ABCE = 0$, dann stets $ABCDE = 0$.

32. Satz: Sind EF zwei verschiedene Punkte von $|ABCD|$, dann ist A Punkt von $|CDEF|$.

Beweis: Es existieren G und H so, daß $ABCG = DEG = 0$ und $ABCH = DFH = 0$ ist. $[AC]$ und $[GH]$ schneiden sich in I (nach 23). $\{DEF\}$ enthält (14) DE, also wegen $DEG = 0$ und (20) auch G; $\{DEF\}$ enthält ebenso DF, also wegen $DFH = 0$ auch H. Demnach enthält $\{DEF\}$ G und H, also $[GH]$, also I. Aus $DEFI = CAI = 0$ folgt aber nach 27 die Existenz von K, so daß $CDEK = FAK = 0$ ist, d. h. daß A in $|CDEF|$ liegt; q. e. d.

33. Satz: Ist $EFG \neq 0$ und E, F, G in $|ABCD|$, dann ist A in $|DEFG|$.

Beweis: Aus $ABCDE = ABCDF = ABCDG = 0$ folgt nach 32: $ABDEF = ABDEG = 0$, hieraus $ADEFG = 0$; q. e. d.

34. Satz: Ist $EFGH \neq 0$ und E, F, G, H in $|ABCD|$, dann ist jeder Punkt I von $|ABCD|$ auch in $|EFGH|$.

Beweis: Aus $ABCDE = 0$ u. $ABCDF = ABCDG = ABCDH = ABCDI = 0$ folgt $ABCEF = ABCEG = ABCEH = ABCEI = 0$, hieraus ebenso: $ABEFG = ABEFH = ABEFI = 0$, daraus: $AEFGH = AEFGI = 0$ und schließlich $EFGHI = 0$.

35. Satz: Ist $EFGH \neq 0$ und E, F, G, H in $|ABCD|$, dann ist jeder Punkt von $|EFGH|$ auch in $|ABCD|$.

Beweis: Nach 34 ist jeder Punkt von $|ABCD|$, also auch A, B, C, D in $|EFGH|$; also (nach 34) jeder Punkt von $|EFGH|$ auch in $|ABCD|$; q. e. d.

36. Definition: Zwei solche Räume heißen „identisch", $|ABCD| = |EFGH|$, sonst „verschieden" $|ABCD| \neq |EFGH|$.

37. Satz: Liegen drei Punkte E, F, G einer Ebene in einem Raume $|ABCD|$, dann jeder Punkt der Ebene.

Beweis: Mindestens einer der Punkte A, B, C, D ist von jedem der Punkte E, F, G verschieden. Wird einer dieser verschiedenen Punkte mit H bezeichnet, so sind E, F, G, H, also (nach 35) alle Punkte von $|EFGH|$, also speziell (nach 30) alle Punkte von $\{EFG\}$ in $|ABCD|$.

38. Satz: Liegen zwei Punkte E, F einer Geraden $[EF]$ in einem Raume $|ABCD|$, dann alle Punkte der Geraden.

Beweis: Mindestens zwei der vier Punkte A, B, C, D sind nicht mit den Punkten E, F in einer Ebene. Werden zwei dieser verschiedenen Punkte mit G, H bezeichnet, so sind E, F, G, H, also (nach 35) alle Punkte von $|EFGH|$, also speziell (nach 30), alle Punkte von $[EF]$ in $|ABCD|$.

39. Grundsatz: Es gibt mindestens einen Punkt in demselben Raume, wie die nach 2, 8, 24 existierenden vier Punkte, aber mit keinen drei von ihnen in einer Ebene.

Folgerungen: 1) Es gibt in demselben Raume mindestens fünf Ebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen.

Beweis: Sind A, B, C, D, E fünf der mindestens existierenden Punkte, deren keine vier in einer Ebene liegen, so sind $\{ABC\}$, $\{BCD\}$, $\{CDE\}$, $\{DEA\}$, $\{EAB\}$ fünf Ebenen, deren keine vier durch einen Punkt gehen. Denn es schneiden sich z. B. die drei ersten in C, welcher Punkt nicht in $\{DEA\}$ oder $\{EAB\}$ liegt.

2) Durch jeden der Punkte $A, B, C, D, E, \cdots$ gehen mindestens vier, zu je dreien nicht in einer Ebene liegende Gerade, z. B. durch E die Geraden $[AE]$, $[BE]$, $[CE]$, $[DE]$.

3) Auf jeder dieser Ebenen liegen mindestens vier, zu je dreien,

nicht durch einen Punkt gehende Gerade, z. B. auf $\{ABC\}$ ihre Schnittgeraden mit $\{BCD\}$, $\{CDE\}$, $\{DEA\}$, $\{EAB\}$.

40. Satz: Auf jeder Ebene liegen mindestens vier, zu je dreien nicht in einer Geraden liegende Punkte: A', B', C', D'.

Beweis: Da einer der Punkte $A, B, C \cdot\cdot$ z. B. E nicht auf ihr liegt, sind ihre Schnittpunkte mit $[AE]$, $[BE]$, $[CE]$, $[DE]$ vier Punkte der verlangten Art.

Folgerungen: 1) Auf jeder Ebene liegen mindestens vier, zu je dreien nicht durch einen Punkt gehende Gerade, z. B. die Geraden $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'A']$.

2) Durch jeden Punkt gehen mindestens vier, zu je dreien nicht in einer Ebene liegende Gerade, seine Verbindungsgeraden a', b', c', d' mit A', B', C', D', wenn $\{A'B'C'\}$ nicht durch ihn geht.

3) Durch jeden Punkt gehen mindestens vier, zu je dreien nicht durch eine Gerade gehende Ebenen, z. B. die Ebenen $\{a'b'\}$, $\{b'c'\}$, $\{c'd'\}$, $\{d'a'\}$.

41. Sätze: Durch jede Gerade gehen mindestens drei verschiedene Ebenen, z. B. ihre Verbindungsebenen mit A, B, C, wenn sie nicht in $\{ABC\}$ liegt.

Auf jeder Geraden liegen mindestens drei verschiedene Punkte, z. B. ihre Schnittpunkte mit den Ebenen $\{ABE\}$, $\{BCE\}$, $\{CAE\}$, wenn sie nicht durch E geht.

In jeder Ebene gehen durch jeden Punkt mindestens drei verschiedene Gerade, z. B. die Verbindungsgeraden des Punktes mit den Punkten A', B', C' (40), wenn er nicht auf $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'A']$ liegt.

42. Grundsatz: Es existiert kein Punkt außerhalb $|ABCD|$. Dieser Grundsatz ist lediglich Erfahrungsgesetz. Verzichtet man auf ihn, so wird man auf die Geometrie von mehr als drei Dimensionen geführt. Der Aufbau einer solchen Geometrie bietet durchaus keine neuen grundsätzlichen Schwierigkeiten; vielmehr finden sich alle wesentlichen Eigenschaften schon im Raume von drei, aber nicht weniger als drei Dimensionen, wie sich zeigen wird. Aus diesem Grunde können wir uns auf die Geometrie des dreidimensionalen Raumes beschränken.

43. Satz: Eine Ebene $\{FGH\}$ und eine nicht in ihr liegende Gerade $[IK]$ schneiden sich in einem, also (wegen 20) nur einem Punkte.

Beweis: Da (nach 42) K mit F, G, H, I in einem Raume liegt, existiert (nach 25) ein Punkt L so, daß $FGHL = IKL = 0$ ist.

44. Satz: Zwei verschiedene Ebenen $\{ABC\}$, $\{DEF\}$ haben zwei Punkte, also nach 20 eine Gerade gemein.

Beweis: Die nach 43 existierenden Punkte G, H, für welche $ABCG = DEG = 0$ und $ABCH = DFH = 0$ ist, liegen in $\{ABC\}$ und nach 20 in $\{DEF\}$.

45. Satz: Drei verschiedene Ebenen haben einen Punkt oder eine Gerade gemein.

Beweis aus 43 und 44.

46. Definitionen: Alle Geraden und Ebenen eines Punktes bilden ein „Bündel“, alle Geraden und Punkte einer Ebene bilden ein „Feld“; alle Ebenen einer Geraden bilden ein „Ebenenbüschel“, alle Punkte einer Geraden bilden eine „Punktreihe“; alle Geraden einer Ebene und eines Punktes bilden ein „Geradenbüschel“.

Das Aufsuchen der Geraden zweier Punkte, der Ebene dreier Punkte oder eines Punktes und einer Geraden oder zweier Geraden eines Punktes heißt „Verbinden“, das Aufsuchen der Geraden zweier Ebenen, des Punktes dreier Ebenen oder einer Ebene und einer Geraden oder zweier Geraden einer Ebene heißt „Schneiden“. Eine endliche Reihenfolge von Operationen des Verbindens und Schneidens heißt „Konstruktion“. Eine Aussage, daß man durch zwei verschiedene Konstruktionen von denselben Grundelementen (Punkten, Geraden, Ebenen) ausgehend zu demselben Elemente (Punkt oder Gerade oder Ebene) gelangt, heißt ein „Schließungssatz“. Die Gesamtheit der Elemente, die sich durch Konstruktion aus gegebenen Grundelementen ableiten lassen, heißt das „Netz“ dieser Grundelemente. Ein Netz kann „endlich“ oder „abzählbar“ oder „stetig“ sein. (Die Stetigkeit ist erst auf Grund der Anordnungsaxiome definierbar.)

Liegt ein Punkt in einem Punkte oder einer Geraden oder einer Ebene, eine Gerade in einer Geraden oder einer Ebene, eine Ebene in einer Ebene, so sollen die Elemente „koinzidierend“ heißen.

Ein System von m Punkten und n Geraden einer Ebene derart, daß die m Punkte zu je μ auf einer der n Geraden liegen und daß die n Geraden zu je ν durch einen der m Punkte gehen, heißt eine ebene „Konfiguration“ (m_μ, n_ν); es wird $(m_\mu, m_\mu) = (m_\mu)$ gesetzt. Analog sind Konfigurationen des Bündels und des Raumes zu definieren.

47. Satz: Ein ebenes Netz von abzählbar viel Grundpunkten kann nur abzählbar, von endlich viel Grundpunkten auch endlich sein und bildet dann eine Konfiguration $(\mu^2 - \mu + 1_\mu)$.

Beweis: Sind P_1, P_2 zwei beliebige Punkte des Netzes und wählt man P_3, P_4, $\cdot\cdot$ der Reihe nach so, daß niemals P_h im Netz der Punkte P_1, P_2, $\cdot\cdot$, P_{h-1} enthalten ist, so bildet die endliche oder abzählbare Menge von Punkten P_1, P_2, P_3, $\cdot\cdot$ eine Menge von Grund-

punkten des Netzes. Nunmehr ordne man die abzählbare oder endliche Menge von Punkten

$$([P_h P_i],\ [P_k P_l]), \qquad \begin{pmatrix} h < i \\ h < k < l \end{pmatrix}$$

für jeden Index h in eine Reihe $P_h^{(1)}, P_h^{(2)}, \cdot\cdot$ und diese mit den Grundpunkten zusammen in die Reihe:

$$P_1,\ P_2,\ P_1^{(1)},\ P_3,\ P_2^{(1)},\ P_1^{(2)},\ P_4,\ P_3^{(1)},\ P_2^{(2)},\ P_1^{(3)}, \cdot\cdot,$$

aus der man ebenso eine neue Reihe von Punkten ableiten und in diese einordnen kann. Nach jeder endlichen Anzahl von Schritten findet man so die Gesamtheit der konstruierten Punkte in eine Reihe geordnet, also endlich oder abzählbar.

Ist die Gesamtheit der Punkte endlich, so gehen durch zwei beliebige Punkte, z. B. P_1, P_2 gleichviel Gerade; denn man kann die Punkte $P_1, P_2, P_3, \cdot\cdot$ der Reihe nach den Punkten $P_2, P_1, P_3 \cdot\cdot$ und dann die durch Konstruktion aus $P_1, P_2, P_3, \cdot\cdot$ abgeleiteten Punkte und Geraden den durch entsprechende Konstruktion aus $P_2, P_1, P_3, \cdot\cdot$ abgeleiteten Punkten und Geraden zuordnen. Ebenso zeigt man, daß auf zwei beliebigen Geraden des Netzes gleichviel Punkte des Netzes liegen. Ist also (m_μ, n_ν) die Konfiguration des Netzes, so liegen auf jeder der μ durch einen Netzpunkt gehenden Geraden $\nu - 1$ der m Punkte; demnach ist

$$m = \mu(\nu - 1) + 1 \quad \text{und ebenso} \quad n = \nu(\mu - 1) + 1.$$

Ferner fallen die $\frac{m(m-1)}{2}$ Verbindungslinien je zweier der m Punkte zu je $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ auf eine der n Geraden, also ist

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2} n,$$

woraus durch Einsetzung der obigen Werte für m und n

$$(\mu - 1)(\nu - 1)^2(\mu - \nu) = 0,$$

also, wegen $\mu > 1,\ \nu > 1$,

$$\mu = \nu, \quad m = n = \mu^2 - \mu + 1$$

folgt.

Ein ebenes Netz mit endlich viel Punkten kann man z. B. folgendermaßen bilden. Es sei p eine beliebige Primzahl. Ein Tripel von drei ganzen Zahlen x, y, z, die nicht zugleich $\equiv 0 \pmod p$ sind, heiße ein Punkt (x, y, z). Zwei Punkte (x, y, z), (x', y', z') heißen identisch, wenn und nur wenn $x' \equiv kx,\ y' \equiv ky,\ z' \equiv kz \pmod p$ ist. Unter denselben Festsetzungen soll ein Tripel von drei ganzen Zahlen ξ, η, ζ

auch als Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$ bezeichnet werden. Der Punkt (x, y, z) und die Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$ heißen koinzidierend, wenn und nur wenn

$$x\xi + y\eta + z\zeta \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Alsdann haben zwei verschiedene Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$, $[\xi', \eta', \zeta']$ genau einen Punkt gemein. Denn ist erstens $\zeta \equiv \zeta' \equiv 0$, also von ξ, ξ', η, η' wenigstens zwei nicht entsprechende, etwa $\xi, \eta', \not\equiv 0$, so ist $(0, 0, 1)$ der einzige Schnittpunkt, denn für jeden anderen würde aus

$$x\xi + y\eta \equiv 0, \quad x\xi' + y\eta' \equiv 0$$

folgen:

$$y \equiv -\frac{\xi'}{\eta'}x \equiv -\frac{\xi'}{\eta'} \cdot -\frac{\eta}{\xi} \cdot y, \quad \text{also } \xi\eta' - \xi'\eta \equiv 0,$$

d. h.

$$[\xi, \eta, 0] = [\xi\eta', \eta\eta', 0] = [\xi'\eta, \eta'\eta, 0] = [\xi', \eta', 0].$$

Ist zweitens $\zeta \not\equiv 0$, $\zeta' \equiv 0$, also von ξ', η' wenigstens eines, etwa $\eta' \not\equiv 0$, so kommt:

$$y \equiv -\frac{\xi'}{\eta'}x, \quad z \equiv -\frac{\xi x + y\eta}{\zeta} \equiv -\frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\eta'\zeta}x,$$

also $(-\eta'\zeta, \xi'\zeta, \xi\eta' - \xi'\eta)$ als einziger Schnittpunkt.

Ist drittens $\zeta \not\equiv 0$, $\zeta' \not\equiv 0$, so sind $\zeta\xi' - \zeta'\xi$, $\eta\zeta' - \eta'\zeta$ nicht beide $\equiv 0$, da sonst $[\xi, \eta, \zeta] = [\xi\zeta', \eta\zeta', \zeta\zeta'] = [\xi'\zeta, \eta'\zeta, \zeta'\zeta] = [\xi', \eta', \zeta']$ wäre. Sei also $\eta\zeta' - \eta'\zeta \not\equiv 0$, so kommt:

$$y \equiv \frac{\zeta\xi' - \zeta'\xi}{\eta\zeta' - \eta'\zeta}x, \quad z \equiv \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\eta\zeta' - \eta'\zeta}x, \quad \text{also } (\eta\zeta' - \eta'\zeta, \zeta\xi' - \zeta'\xi, \xi\eta' - \xi'\eta)$$

als einziger Schnittpunkt.

Ebenso beweist man, daß zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade bestimmen.

48. Definition: Die Sätze in der Ebene:

Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade (4).	Zwei verschiedene Gerade schneiden sich in genau einem Punkt (21).
Es gibt mehr als drei*), zu je drei auf keiner Geraden liegende Punkte (40).	Es gibt mehr als drei, zu je drei durch keinen Punkt gehende Gerade (40).

*) Es ist üblich, statt dessen den Grundsatz: Es gibt unendlich viele Punkte, anzunehmen. Wie aus 47 folgt, gibt es aber auch „endliche" Geometrien, so daß dieser Grundsatz mehr enthält, als erforderlich ist. Andererseits enthält er zu wenig, da eine „unendliche" Menge von Punkten sowohl abzählbar als (nach Einführung der Anordnung) stetig sein kann und in beiden Fällen auch noch die Anordnung linear oder planar usw. sein könnte, was notwendig angegeben werden muß, wenn der fragliche Grundsatz einen hinreichend bestimmten Inhalt haben soll.

im Bündel:

Durch zwei verschiedene Gerade gibt es genau eine Ebene (23).	Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden (44).
Es gibt mehr als drei, zu je drei in keiner Ebene liegende Gerade (40).	Es gibt mehr als drei, zu je drei durch keine Gerade gehende Ebenen (40).

im Raume:

Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade (4).	Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich in genau einer Geraden (44).
Durch drei verschiedene Punkte gibt es genau eine Ebene oder eine Gerade (9).	Drei verschiedene Ebenen schneiden sich in genau einem Punkt oder einer Geraden (45).
Durch eine Gerade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es genau eine Ebene (21).	Eine Gerade und eine nicht durch sie gehende Ebene schneiden sich in genau einem Punkt (43).
Es gibt mehr als vier (siehe *) S. 64), zu je vier in keiner Ebene liegende Punkte (39).	Es gibt mehr als vier, zu je vier durch keinen Punkt gehende Ebenen (39).

sollen als die „Axiome der Verknüpfung“ bezeichnet werden. Dieselben bilden nicht, wie die ursprünglichen Axiome, ein System voneinander unabhängiger Axiome, sie sind aber als Axiome zulässig, da aus ihnen die definierenden Eigenschaften der Geraden (4), der Ebene (9), des Raumes (25), die Existentialaxiome (2, 8, 24, 39 und 11) folgen.

49. Definition: Das vollständige System von Lehrsätzen, welche man aus den Axiomen der Verknüpfung resp. der Ebene, des Bündels, des Raumes (unter eventueller Hinzunahme weiterer Axiome) herleiten kann, heißt „Geometrie“ resp. der Ebene, des Bündels, des Raumes.

50. Definition: In der Geometrie der Ebene heißen die Elemente Punkt und Gerade, in der Geometrie des Bündels die Elemente Gerade und Ebene, in der Geometrie des Raumes die Elemente Punkt und Ebene einander, und die Gerade sich selbst „dual“. Lassen sich zwei Sätze zweier Geometrien so aufeinander beziehen, daß jedem Element des einen genau ein duales Element des anderen und koinzidierenden Elementen koinzidierende Elemente entsprechen, so heißen die beiden Sätze „dual“.

51. Dualitätsprinzip*): Dem „Verbinden“ zweier Elemente entspricht „dual“ das „Schneiden“ der dualen Elemente. Jeder Kon-

*) Gergonne, Gerg. Ann. 16 (1825, 1826), S. 209.

struktion und jedem Schließungssatz entspricht eine „duale“ Konstruktion und ein dualer Schließungssatz. Jedem Satze einer Geometrie entspricht ein dualer Satz derselben Geometrie. Jedem Satze einer Geometrie der Ebene als Satz einer Geometrie des Raumes entspricht dual ein Satz einer Geometrie des Bündels: die Geometrien der Ebene und des Bündels sind dual zueinander.

Beweis: Die Dualität ist bei allen Axiomen der Verknüpfung (48) vorhanden, muß also auch für alle Folgerungen aus diesen bestehen bleiben. Zugleich zeigt sich, daß bei einer Erweiterung der Axiomensysteme nur dann das Dualitätsprinzip unbeschränkt gültig bleibt, wenn die hinzugefügten Axiome dual einander entsprechen.

52. Definition: Zwei Geometrien heißen reziprok (resp. kollinear) aufeinander abgebildet, wenn jedem Elemente der einen genau ein Element der dualen (resp. nichtdualen) Art der anderen, und wenn koinzidierenden Elementen koinzidierende Elemente entsprechen.*)

53. Definition: Jede Geometrie, welche sich projektiv d. h. reziprok oder kollinear auf eine Geometrie der Ebene (resp. des Raumes) abbilden läßt, heißt ebene (resp. räumliche) Geometrie. Demnach ist die Geometrie des Bündels eine ebene Geometrie.

54. Definition: Kann man die Elemente einer ebenen Geometrie durch Hinzunahme weiterer Elemente derart ergänzen, daß in dem erweiterten System die Sätze einer räumlichen Geometrie gelten, so heißt die ebene Geometrie „Schnitt“ der räumlichen, und ihre Sätze heißen „ebene“ Sätze der räumlichen.

55. Satz: Wenn zwei Geometrien kollinear (reziprok) aufeinander abgebildet sind, so gelten in beiden dieselben (resp. duale) Schließungssätze.

Dieser Satz ist evident, er gilt aber auch umgekehrt. Die Umkehrung kann hier nur in der engeren Fassung bewiesen werden:

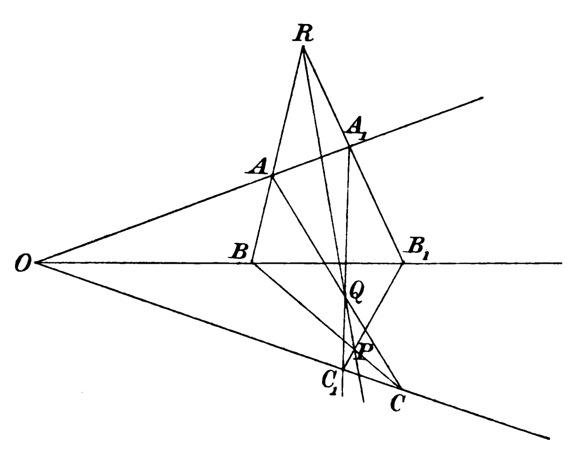
56. Satz: Wenn in zwei Geometrien von einer gleichen endlichen oder abzählbaren Menge von nicht durch Schließungssätze verbundenen Grundelementen dieselben (resp. duale) Schließungssätze gelten, so sind sie kollinear (resp. reziprok) aufeinander abzubilden.

Beweis: Man kann zunächst den in eine Reihe geordneten Grundelementen der einen Geometrie der Reihe nach die in eine Reihe geordneten Grundelemente der entsprechenden (resp. der dualen) Art der anderen Geometrie und dann die durch entsprechende (resp. duale) Konstruktionen entstehenden Elemente einander zuordnen. Ein Wider-

*) Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, § 288 (Ges. W. Bd. 1, S. 376 ff.).

spruch mit der Eindeutigkeit oder mit der Kollinearität (resp. Reziprozität) der Abbildung würde nur eintreten können, wenn man in der einen Geometrie durch zwei verschiedene Konstruktionen zu demselben Elemente, in der anderen durch die entsprechenden Konstruktionen zu zwei verschiedenen Elementen gelangte, was gegen die Voraussetzung übereinstimmender Schließungssätze ist.

57. Desarguesscher Satz*): Sind $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ drei Gerade eines Punktes O, welche nicht in einer Ebene liegen, schneiden sich also nach 11 die Geraden $[AB]$, $[A_1B_1]$ in einem Punkte R, die Geraden $[AC]$, $[A_1C_1]$ in einem Punkte Q, die Geraden $[BC]$, $[B_1C_1]$ in einem Punkte P, so liegen die drei Punkte P, Q, R in einer Geraden (s. Fig.).



Beweis für den Raum: P liegt auf $[BC]$, also in $\{ABC\}$ (14), ebenso in $\{A_1B_1C_1\}$, also in der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen; dasselbe gilt von Q und R.

58. Satz: Wenn eine ebene Geometrie Schnitt einer räumlichen ist, so gilt in ihr der Desarguessche Satz.

Beweis: Es seien $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ drei in einer Ebene E liegende Gerade eines Punktes O. Da die ebene Geometrie Schnitt einer räumlichen sein soll, existieren außerhalb der Ebene E noch Punkte. Man verbinde einen derselben, S, mit A, B, C, A_1, B_1, C_1. Auf der Geraden SC wähle man einen von S und C verschiedenen Punkt C', der nach 41 existiert und bezeichne den Punkt $([SC_1][OC'])$, der nach 11 existiert, mit C_1', so gilt für $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[C'C_1']$ der Desarguessche Satz (57). Sind

$$P' = ([BC'], [B_1C_1']), \quad Q' = ([AC'], [A_1C_1']), \quad R = ([AB], [A_1B_1])$$

die drei in einer Geraden liegenden Schnittpunkte und

$$P = ([SP'], \mathsf{E}), \quad Q = ([SQ'], \mathsf{E}),$$

so ist

*) Desargues l. c.; s. auch Pappus l. c. S. 653.

$$P = ([SP'], \mathsf{E}) = (\{SBC'\}, \{SB_1C_1'\}, \mathsf{E})$$
$$= ([\{SBC'\}, \mathsf{E}], [\{SB_1C_1'\}, \mathsf{E}]) = ([BC], [B_1C_1]),$$

ebenso:

$$Q = ([AC], [A_1C_1]),$$

womit der Satz bewiesen ist.

59. Satz: Wenn eine ebene Geometrie nicht Schnitt einer räumlichen ist, so braucht in ihr der Desarguessche Satz nicht zu gelten: derselbe ist keine Folge der ebenen Axiome, denn es existiert eine ebene „Nicht-Desarguessche“ Geometrie.

Beweis: Unter Zugrundelegung des Systems der gemeinen reellen Zahlen bezeichnen wir das Aggregat zweier solcher Zahlen (x, y) als einen Punkt, ferner die Gesamtheit der Punkte, welche entweder den Bedingungen:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p, \quad x^2 + y^2 \geqq 1 \qquad (p \geqq 0)$$

oder den Bedingungen:

$$\lambda_p(x^2 + y^2 - 1) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p, \quad x^2 + y^2 < 1$$

genügen, als Gerade $\left[\frac{\cos\alpha}{p}, \frac{\sin\alpha}{p}\right]$; hier sei λ_p eine nur den Bedingungen

$$0 < \lambda_p < \frac{p}{2} \text{ für } p > 0,$$
$$\frac{\lambda_p}{p} \neq \text{const.}$$
$$\lambda_0 = 0$$

entsprechende, im übrigen beliebig gewählte stetig von Null an wachsende reelle Funktion von p, z. B. $\lambda_p = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\arcsin p}{2}$. Für diese Geometrie gelten die ebenen Axiome der Verknüpfung*), wie man am einfachsten nach anschaulicher Interpretation**) erkennt. Dann wird nämlich das innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ liegende Stück AB einer Geraden $[AB]$ durch einen Kreisbogen AB ersetzt, der zwischen der Sehne AB und dem zu $x^2 + y^2 = 1$ senkrechten Kreis-

*) Die Gerade [0, 0] und die auf ihr liegenden Punkte werden nicht ausgeschlossen.

**) Diese Interpretation in der gewöhnlichen ebenen Geometrie kann unbedenklich verwendet werden, da die Begründung dieser Geometrie zwar erst später, aber unabhängig von 59 erfolgt. Die obige Nicht-Desarguessche Geometrie ist einfacher als die von Hilbert (Grundlagen § 23) zu demselben Zweck konstruierte, in welcher die Geradenstücke innerhalb einer Ellipse durch Kreisbogen ersetzt werden.

bogen AB liegt. Aber es gilt nicht der Desarguessche Satz. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß, wenn die drei Gleichungen

$$x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h = 0 \qquad (h = 0, 1, 2)$$

eine gemeinsame Lösung (x, y) besitzen, dasselbe bei den Gleichungen

$$\lambda_{p_h}(x^2 + y^2 - 1) = x \cos \alpha_h + y \sin \alpha_h - p_h \qquad (h = 0, 1, 2)$$

im allgemeinen nicht mehr der Fall sein wird. Denn die hierzu erforderliche Gleichung

$$\lambda_{p_0} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda_{p_1} \sin(\alpha_2 - \alpha_0) + \lambda_{p_2} \sin(\alpha_0 - \alpha_1) = 0$$

wird dann zwar für die ausgeschlossene Wahl $\lambda_p = \text{const.}\, p$, aber im allgemeinen für keine andere Wahl der Funktion λ_p erfüllt sein.

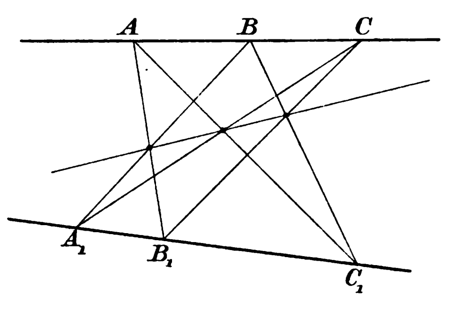
Bemerkung: In dieser Geometrie gilt nicht nur nicht der Desarguessche Satz, sondern überhaupt kein Schließungssatz. Ob es (ebene) Nicht-Desarguessche Geometrien gibt, in denen andere Schließungssätze gelten, bleibt hier dahingestellt.

60. Pascalscher Satz: Liegen A, B, C auf einer, A_1, B_1, C_1 auf einer zweiten Geraden einer Ebene, so liegen die drei Punkte

$$([BC_1], [B_1C]), \quad ([CA_1], [C_1A]), \quad ([AB_1], [A_1B])$$

in einer Geraden*) (s. Fig.).

Im Gegensatz zum ebenen Desarguesschen Satz ist dieser ebene Schließungssatz durch Verbinden und Schneiden aus keinem der räumlichen Sätze herzuleiten, welche bloße Folgerungen der räumlichen Verknüpfungsgrundsätze sind; wie später gezeigt wird.**)



Andererseits gibt es räumliche Figuren, aus denen der Pascalsche Satz durch Schneiden gefolgert werden kann. Insbesondere wollen wir zeigen, daß der Pascalsche Satz aus dem folgenden Satze, und umgekehrt dieser aus jenem, gewonnen werden

---

*) Dieser auf ein Geraden-Paar bezogene Satz von Pascal (s. Œuvres de Blaise-Pascal, la Haye 1779, Bd. 4, Essai pour les coniques, S. 1—7) findet sich ebenfalls schon bei Pappus (Collectanea ed. Hultsch, Bd. 2, S. 893).

**) A. Schönflies (Über Konfigurationen, welche sich aus gegebenen Raumelementen durch bloßes Verbinden und Schneiden ableiten lassen. Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung I, 1892, p. 62) beweist nur, daß es keine aus den Verknüpfungssätzen folgende Raumfigur gibt, von der jeder allgemeine Schnitt die Konfiguration des Pascalschen Satzes gäbe.

kann: Existieren von den sechzehn Schnittpunkten $(\mathfrak{G}_m \mathfrak{H}_n)$ zweier Geradenquadrupel im Raume $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ nur fünfzehn, dann existiert auch der sechzehnte.

Es soll die Existenz des sechzehnten Schnittpunktes $(\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_3)$ aus der der übrigen vermittelst des Pascalschen Satzes bewiesen werden. Sei $\{\mathfrak{G}_0 \mathfrak{H}_0\} = \mathsf{E}$, $(\mathsf{E}\mathfrak{G}_m) = G_m$, $(\mathsf{E}\mathfrak{H}_n) = H_n$ usw., dann liegen G_1, G_2, G_3 auf $\mathfrak{G}_0$, H_1, H_2, H_3 auf $\mathfrak{H}_0$, also nach dem Pascalschen Satze:

$$([G_2 H_3]\,[G_3 H_2]) = P_1,$$
$$([G_3 H_1]\,[G_1 H_3]) = P_2,$$
$$([G_1 H_2]\,[G_2 H_1]) = P_3,$$

auf einer Geraden $\mathfrak{P}$. Also gehen die drei Geraden

$$[\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_3\}\,\{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_2\}] = \mathfrak{P}_1,$$
$$[\{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_1\}\,\{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_3\}] = \mathfrak{P}_2,$$
$$[\{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_2\}\,\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_1\}] = \mathfrak{P}_3$$

durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 einer Geraden $\mathfrak{P}$. Nun liegen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_3$ in $\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_2\}$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ in $\{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_1\}$, also $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ in $\{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_3\}$, also schneiden sich $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, also auch die vier Ebenen:

$$\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_3\},\ \{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{G}_2\},\ \{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_1\},\ \{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_3\},$$

also auch die zwei Geraden:

$$[\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_3\}\,\{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_3\}] = \mathfrak{H}_3, \quad [\{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_2\}\,\{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_1\}] = \mathfrak{G}_3.$$

Soll umgekehrt aus diesem Satze der Pascalsche für die Punkttripel G_1, G_2, G_3 auf $\mathfrak{G}_0$ und H_1, H_2, H_3 auf $\mathfrak{H}_0$ bewiesen werden, so ziehe man durch G_1, nicht in $\{\mathfrak{G}_0 \mathfrak{H}_0\} = \mathsf{E}$, die Gerade $\mathfrak{G}_1$, dann durch H_1 und $\mathfrak{G}_1$ die Gerade $\mathfrak{H}_1$, dann durch G_2 und $\mathfrak{H}_1$ die Gerade $\mathfrak{G}_2$, dann durch H_2, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ die Gerade $\mathfrak{H}_2$, ferner durch G_3, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ die Gerade $\mathfrak{G}_3$ und schließlich durch H_3, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ die Gerade $\mathfrak{H}_3$. Alsdann existieren für die beiden Geradenquadrupel $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ fünfzehn Schnittpunkte, also auch der sechzehnte $(\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_3)$. Demnach liegen die drei Geraden $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ (s. o.) zu je zweien in einer der drei Ebenen $\{\mathfrak{G}_1 \mathfrak{H}_1\}$, $\{\mathfrak{G}_2 \mathfrak{H}_2\}$, $\{\mathfrak{G}_3 \mathfrak{H}_3\}$, schneiden sich also zu je zweien, liegen also alle drei in einer Ebene $\varDelta$, demnach ihre drei Schnittpunkte P_1, P_2, P_3 mit E in einer Geraden $[\varDelta \mathsf{E}]$.

Anmerkung: Die zum Desarguesschen und zum Pascalschen Satze in der Ebene dualen Sätze und die Umkehrungen stimmen mit den Sätzen selbst überein. Die ihnen im Raume dualen Sätze sind Sätze im Bündel, deren ebene Schnittfiguren wieder die Sätze selbst ergeben.

61. Satz: Unter Zugrundelegung eines nichtsingulären (s. I 76, p. 23) Zahlensystems, in dem das assoziative, aber nicht notwendig das

kommutative Gesetz der Multiplikation gilt, werde ein Zahlentripel (x, y, z), wo x, y, z nicht alle drei Null sind, als Punkt, zwei Punkte (x, y, z), $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, wo λ eine beliebige von Null verschiedene Zahl bezeichnet, als identisch, sonst als verschieden, ebenso ein Zahlentripel derselben Art $[\xi, \eta, \zeta] = [\xi l, \eta l, \zeta l]$ als Gerade bezeichnet und das Zusammenfallen eines Punktes (x, y, z) mit einer Geraden $[\xi, \eta, \zeta]$ durch die Gleichung $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ definiert, welche bei variabeln x, y, z Gleichung der Geraden $[\xi, \eta, \zeta]$ bei variabeln ξ, η, ζ Gleichung des Punktes (x, y, z) heiße. In diesem System von Punkten und Geraden gelten die ebenen Axiome der Verknüpfung.

Beweis: Zwei verschiedene Punkte (x', y', z'), (x'', y'', z'') bestimmen eine Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$, deren Gleichung $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ sich durch Elimination von ξ, η, ζ hieraus und aus

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta = 0$$
$$x''\xi + y''\eta + z''\zeta = 0$$

ergibt. Man kann $z'' \neq 0$ annehmen und erhält

$$\left(x - \frac{z}{z''}\,x''\right)\xi + \left(y - \frac{z}{z''}\,y''\right)\eta = 0$$
$$\left(x' - \frac{z'}{z''}\,x''\right)\xi + \left(y' - \frac{z'}{z''}\,y''\right)\eta = 0.$$

Man kann ferner wegen der Verschiedenheit der beiden gegebenen Punkte sicher eine der beiden Größen $x' - \frac{z'}{z''}\,x''$, $y' - \frac{z'}{z''}\,y''$, etwa die erste, als von Null verschieden annehmen und erhält

$$\frac{x - \frac{z}{z''}\,x''}{x' - \frac{z'}{z''}\,x''}\left(y' - \frac{z'}{z''}\,y''\right) = y - \frac{z}{z''}\,y'',$$

als Gleichung der Geraden.*) Ebenso ergibt sich, daß zwei verschiedene Gerade einen Schnittpunkt bestimmen. Daß aber zwei verschiedene Gerade $[\xi', \eta', \zeta']$, $[\xi'', \eta'', \zeta'']$ nicht zwei verschiedene Schnittpunkte (x', y', z'), (x'', y'', z'') haben können, ergibt sich aus den Gleichungen

$$x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' = 0$$
$$x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0$$
$$x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0$$
$$x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' = 0$$

*) und zwar nicht der ausgeschlossenen $[0, 0, 0]$.

wie folgt: ist erstens

$$x' = x'' = 0 \quad \text{und} \quad \eta' = 0, \ \zeta'' = 0,$$

so folgt

$$z'\zeta' = 0, \ z''\zeta' = 0,$$

also, da z' und z'' nicht beide Null sein können, $\zeta' = 0$; ebenso $\eta'' = 0$, demnach wären die beiden Geraden nicht verschieden. Man kann daher annehmen, daß η' und ζ'' nicht zugleich Null sind. Sind also η' und η'' beide $\neq 0$, aber ζ' oder $\zeta'' = 0$, so folgt $y' = y'' = 0$, also sind die beiden Punkte (x', y', z'), (x'', y'', z'') nicht verschieden. Ist aber $\eta' \neq 0$ und $\zeta' \neq 0$, so folgt:

$$y' = - z' \cdot \frac{\zeta'}{\eta'} = + z' \cdot \frac{1}{z''} y'' \quad \text{oder auch} \quad y'' = z'' \frac{1}{z'} y',$$

falls $z'' = 0$ ist. z' und z'' sind wegen der Verschiedenheit der beiden Punkte nicht zugleich Null. Aus den Gleichungen

$$x' = \frac{z'}{z''} x'' \ (= 0)$$

$$y' = \frac{z'}{z''} y''$$

$$z' = \frac{z'}{z''} z'',$$

bzw. den entsprechenden mit z' im Nenner, folgt die Identität der beiden Punkte. Demnach ist höchstens eine der beiden Größen x', x'' (ebenso y', y''; z', z''; ξ', ξ'' usw.) gleich Null. Demnach ergeben sich für z. B. $\zeta'' \neq 0$ die beiden Gleichungen:

$$x' \left(\xi' - \frac{\xi''}{\zeta''} \zeta'\right) + y' \left(\eta' - \frac{\eta''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0$$

$$x'' \left(\xi' - \frac{\xi''}{\zeta''} \zeta'\right) + y'' \left(\eta' - \frac{\eta''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0,$$

und aus diesen die Gleichungen:

(I)
$$\left(y'' - \frac{x''}{x'} y'\right)\left(\eta' - \frac{\eta''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0$$
oder, falls $x' = 0$ ist:
$$\left(y' - \frac{x'}{x''} y''\right)\left(\eta' - \frac{\eta''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0,$$

ferner:

(II)
$$\left(x'' - \frac{y''}{y'} x'\right)\left(\xi' - \frac{\xi''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0$$
oder, falls $y' = 0$ ist:
$$\left(x' - \frac{y'}{y''} x''\right)\left(\xi' - \frac{\xi''}{\zeta''} \zeta'\right) = 0.$$

Ebenso erhält man die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad \left(y'' - \frac{z''}{z'}\, y'\right)\left(\eta' - \frac{\eta''}{\xi''}\, \xi'\right) = 0,$$

wo der erste Faktor durch $y' - \frac{z'}{z''}\, y''$ zu ersetzen ist, wenn $z' = 0$ ist, und ebenso der zweite durch $\eta'' - \frac{\eta'}{\xi'}\, \xi''$, wenn $\xi'' = 0$ ist. Da die beiden Geraden verschieden sein sollen, so sind von den drei Ausdrücken:

$$\eta' - \frac{\eta''}{\zeta''}\, \zeta', \quad \xi' - \frac{\xi''}{\zeta''}\, \zeta', \quad \eta' - \frac{\eta''}{\xi''}\, \xi' \quad \left(\text{resp. } \eta'' - \frac{\eta'}{\xi'}\, \xi''\right),$$

und ebenso wegen der Verschiedenheit der zwei Punkte von den drei Ausdrücken:

$$y'' - \frac{x''}{x'}\, y' \;\left(\text{resp. } y' - \frac{x'}{x''}\, y''\right), \quad x'' - \frac{y''}{y'}\, x' \;\left(\text{resp. } x' - \frac{y'}{y''}\, x''\right),$$

$$y'' - \frac{z''}{z'}\, y' \;\left(\text{resp. } y' - \frac{z'}{z''}\, y''\right)$$

jedenfalls zwei von Null verschieden, so daß von den obigen drei Gleichungen (I), (II), (III) mindestens eine nicht erfüllt sein kann.

62. Satz: Damit der Punkt (x, y, z) mit den zwei verschiedenen Punkten (x', y', z'), (x'', y'', z'') in einer Geraden $[\xi, \eta, \zeta]$ liegt, ist die Existenz zweier Zahlen λ', λ'' notwendig und hinreichend, für welche

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$y = \lambda' y' + \lambda'' y''$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z''.$$

Beweis: Es ist

$$x'\,\xi + y'\,\eta + z'\,\zeta = 0$$
$$x''\xi + y''\eta + z''\zeta = 0,$$

also auch

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'')\,\xi + (\lambda' y' + \lambda'' \eta'')\,\eta + (\lambda' z' + \lambda'' z'')\,\zeta = 0$$

für alle Werte von λ' und λ'', also ist $(\lambda' x' + \lambda'' x'',\ \lambda' y' + \lambda'' y'',\ \lambda' z' + \lambda'' z'')$ stets ein Punkt der Geraden $[\xi, \eta, \zeta]$. Umgekehrt ist jeder Punkt der Geraden in dieser Form enthalten. Denn es ist von ξ, η, ζ mindestens eins, etwa ζ, und von x', y', x'', y'' mindestens eins, etwa y'', von Null verschieden; ferner ist $x' - \frac{y'}{y''}\, x'' \neq 0$, denn sonst wäre

$$x' = \frac{y'}{y''}\, x'', \quad y' = \frac{y'}{y''}\, y'',$$

also

$$z' = \frac{-x'\xi - y'\eta}{\zeta} = -\frac{y'}{y''}\cdot(x''\xi + y''\eta)\cdot\frac{1}{\zeta} = \frac{y'}{y''}z'',$$

d. h. die beiden Punkte identisch. Setzt man demnach

$$\lambda' = \frac{x - \frac{y}{y''}x''}{x' - \frac{y'}{y''}x''}, \quad \lambda'' = \frac{y - \lambda' y'}{y''},$$

so wird

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$y = \lambda' y' + \lambda'' y''$$

und wegen

$$(x - \lambda' x' - \lambda'' x'')\xi + (y - \lambda' y' - \lambda'' y'')\eta + (z - \lambda' z' - \lambda'' z'')\zeta = 0$$

und $\zeta \neq 0$ auch

$$z = \lambda' z' + \lambda'' z''.$$

63. Satz: Damit die Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$ mit den zwei verschiedenen Geraden $[\xi', \eta', \zeta']$, $[\xi'', \eta'', \zeta'']$ durch einen Punkt geht, ist die Existenz zweier Zahlen l', l'' notwendig und hinreichend, für welche

$$\xi = \xi' l' + \xi'' l''$$
$$\eta = \eta' l' + \eta'' l''$$
$$\zeta = \zeta' l' + \zeta'' l''.$$

Beweis analog wie zu 62, oder man folgert den Satz 63 aus 62 vermittelst des Dualitätsprinzips.

64. Satz: Sind (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''') drei nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene der Punkte (x, y, z), so ist in

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''',\ \lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''',\ \lambda' z' + \lambda'' z'' + \lambda''' z''')$$

für beliebige Werte der λ', λ'', λ''', die nicht zugleich Null sind, stets ein Punkt und für geeignete Werte der λ', λ'', λ''' jeder beliebige Punkt (x, y, z) der Ebene enthalten.

Beweis: Ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $[(x', y', z'), (x'', y'', z'')]$, $[(x, y, z), (x''', y''', z''')]$, so hat man den Satz 62 einerseits auf die drei Punkte

$$(x, y, z),\quad (x''', y''', z'''),\quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

andrerseits auf die drei Punkte

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),\quad (x', y', z'),\quad (x'', y'', z'')$$

anzuwenden und die Größen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zu eliminieren, um den Satz 64 zu erhalten.

65. Satz: Sind $[\xi', \eta', \zeta']$, $[\xi'', \eta'', \zeta'']$, $[\xi''', \eta''', \zeta''']$ drei nicht durch einen Punkt gehende Gerade der Ebene, so ist in

$$[\xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''', \quad \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''', \quad \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l''']$$

für beliebige Werte der l', l'', l''', die nicht zugleich Null sind, stets eine Gerade und für geeignete Werte der l', l'', l''' jede beliebige Gerade $[\xi, \eta, \zeta]$ der Ebene enthalten.

Beweis analog wie zu 64, oder man folgert den Satz 65 aus 64 vermittelst des Dualitätsprinzips.

66. Satz: Für den Satz 61 ist das Bestehen des assoziativen Gesetzes der Multiplikation in dem zugrunde liegenden Zahlensystem notwendig.

Beweis: Auf der Geraden $[\gamma, -1, 0]$ liegen die Punkte $(0, 0, 1)$, $(\beta, \beta\gamma, 1)$ und nach 62 mit diesen beiden in einer, also derselben Geraden (für $\lambda' = \alpha$, $\lambda'' = 1 - \alpha$) der Punkt $(\alpha\beta, \alpha(\beta\gamma), 1)$, d. h. es ist

$$(\alpha\beta)\gamma - \alpha(\beta\gamma) = 0.$$

67. Satz: Für den Satz 61 ist die Nichtexistenz von Teilern der Null, d. h. das Bestehen des Gesetzes B (s. I 76, p. 23), in dem zugrunde liegenden Zahlensystem notwendig.

Beweis: Es sei $\mu\lambda = 0$. Dann ist jeder Punkt $(0, \mu, 1)$ sowohl mit den Punkten $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ als mit den Punkten $(0, 0, 1)$, $(\lambda, 1 - \lambda, 1)$ in einer Geraden, nämlich $[1, 0, 0]$ resp. $[1 - \lambda, -\lambda, 0]$. Gibt es außer $\mu = 0$ noch mindestens einen Wert $\mu \neq 0$, für den $\mu\lambda = 0$ ist, dann haben die beiden Geraden außer dem Punkte $(0, 0, 1)$ noch mindestens einen weiteren, davon verschiedenen Punkt $(0, \mu, 1)$ gemein, müssen also zusammenfallen, d. h. es muß $\lambda = 0$ sein, da der Punkt $(\lambda, 1 - \lambda, 1)$ der zweiten Geraden nur dann der Gleichung $x = 0$ der ersten Geraden genügt.

Anmerkung: Man kann auch singuläre Zahlensysteme zulassen; dann sind aber die Grundsätze der Verknüpfung nur noch „im allgemeinen" gültig, d. h. sie erleiden Modifikationen, sobald singuläre Elemente auftreten. Nennt man Punkt oder Gerade „singulär", wenn ihre Koordinaten alle drei singulär sind, ferner zwei Punkte (x, y, z), $(x', y' z')$ „verschieden" nur, wenn das System $\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}$ vom Singularitätsrange 2 (s. I 94, p. 28) ist, „halbidentisch", wenn es vom Range 2, vom Singularitätsrange 1, „identisch", wenn es vom Range 1 ist, so tritt an die Stelle des ersten Grundsatzes der Verknüpfung (s. 48) der Satz: Zwei Punkte bestimmen „im allgemeinen" eine nicht singuläre Gerade, nämlich wenn sie verschieden sind; sie bestimmen eine singuläre Gerade, wenn sie „halbidentisch", keine bestimmte

Gerade, wenn sie „identisch“ sind. In entsprechender Weise sind die übrigen Sätze abzuändern.

Solche „singulären“ Geometrien sind z. B. Studys Geometrie der Dynamen und Geometrie der Somen*): ebene bzw. räumliche Geometrien von Punkten mit dualen Koordinaten (s. I 46, p. 17). Man kann in einer „singulären“ Geometrie Netze von lauter nichtsingulären Elementen bilden, in denen also trotz der singulären Koordinaten alle Verknüpfungssätze ausnahmslos genau wie in einer „nichtsingulären“ Geometrie gelten.

Um dies nur für eine ebene Geometrie mit dualen Koordinaten $a+bi$ (mit $i^2=0$) zu zeigen, betrachte man das System der Punkte:

$$(l+(m+n)i,\ m+(l+n)i,\ n+(l+m)i)=P_{l,m,n},$$

wo l, m, n nicht alle drei gleich Null sind, und der Geraden:

$$[\lambda-(\mu+\nu)i,\ \mu-(\lambda+\nu)i,\ \nu-(\lambda+\mu)i]=\mathfrak{G}_{\lambda,\mu,\nu},$$

wo λ, μ, ν nicht alle drei gleich Null sind. Dieselben bilden ein Netz, denn die beiden verschiedenen Punkte $P_{l,m,n}$, $P_{l',m',n'}$ bestimmen die Gerade $\mathfrak{G}_{\lambda,\mu,\nu}$ mit $\lambda=mn'-m'n$, $\mu=nl'-n'l$, $\nu=lm'-l'm$, welche in der Tat zu dem betrachteten System gehört, weil niemals $\lambda=\mu=\nu=0$ sein kann; dann würde nämlich, für z. B. $n\neq 0$:

$$l'=\frac{n'}{n}l,\quad m'=\frac{n'}{n}m,\quad n'=\frac{n'}{n}n,$$

d. h. $P_{l,m,n}=P_{l',m',n'}$ folgen, gegen die Voraussetzung. Ebenso bestimmen zwei verschiedene Gerade des Systems einen Punkt desselben. Dieses Netz enthält keinen singulären Punkt (ai, bi, ci); denn $l=0$, $m=0$, $n=0$ ergäbe nur $(0, 0, 0)$, keinen Punkt des Netzes; ebenso enthält das Netz keine singuläre Gerade.

Eine ebene singuläre Geometrie erhält man z. B. auch, wenn man die Punktpaare (AB) und Geradenpaare $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ einer nichtsingulären Geometrie als „Punkte“ und „Geraden“ auffaßt. Die beiden verschiedenen Punkte (AB), $(A'B')$ bestimmen die Gerade $[[AA'][BB']]$ im allgemeinen eindeutig, nämlich wenn sie nicht halbidentisch ($A=A'$ oder $B=B'$) sind; usw.

68. Satz: Unter Zugrundelegung eines Zahlensystems wie in 61 werde ein Zahlenquadrupel (x, y, z, t), wo x, y, z, t nicht alle Null sind, als Punkt, zwei Punkte (x, y, z, t), $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$, wo λ von Null verschieden ist, als identisch, ebenso ein Zahlenquadrupel derselben Art $\{\xi, \eta, \zeta, \tau\}=\{\xi l, \eta l, \zeta l, \tau l\}$ als Ebene bezeichnet und das Zu-

*) Study, Geometrie der Dynamen (Leipzig 1903) p. 556.

sammenfallen des Punktes (x, y, z, t) mit der Ebene $\{\xi, \eta, \zeta, \tau\}$ durch die Gleichung

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0$$

definiert, welche bei variablen x, y, z, t Gleichung der Ebene $\{\xi, \eta, \zeta, \tau\}$, bei variablen ξ, η, ζ, τ Gleichung des Punktes (x, y, z, t) heißen soll. Als Gerade schließlich werde die Gesamtheit von Punkten zweier verschiedener Ebenen definiert. In dem so definierten System von Punkten, Geraden, Ebenen gelten die räumlichen Axiome.

Beweis: Zwei verschiedene Ebenen $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$ bestimmen nach Definition eine Gerade, bestehend aus allen Punkten, die den Gleichungen

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' + t\tau' = 0$$
$$x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + t\tau'' = 0$$

genügen. Sind (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') zwei verschiedene Punkte dieser Geraden, so ist offenbar bei beliebigen λ', λ'', die nicht beide verschwinden, auch $(\lambda'x' + \lambda''x'', \lambda'y' + \lambda''y'', \lambda'z' + \lambda''z'', \lambda't' + \lambda''t'')$ ein Punkt der Geraden. Daß alle Punkte der Geraden hierin enthalten sind, wird unten bewiesen.

Um die gemeinsamen Punkte einer Ebene $\{\xi, \eta, \zeta, \tau\}$ und einer Geraden $(\lambda'x' + \lambda''x'', \lambda'y' + \lambda''y'', \lambda'z' + \lambda''z'', \lambda't' + \lambda''t'')$ zu bestimmen, hat man λ', λ'' gemäß der Gleichung

$$(\lambda'x' + \lambda''x'')\xi + (\lambda'y' + \lambda''y'')\eta + (\lambda'z' + \lambda''z'')\zeta + (\lambda't' + \lambda''t'')\tau = 0$$

oder

$$\lambda'(x'\xi + y'\eta + z'\zeta + t'\tau) + \lambda''(x''\xi + y''\eta + z''\zeta + t''\tau) = 0$$

zu ermitteln. Verschwinden die beiden Koeffizienten:

$$u' = x'\xi + y'\eta + z'\zeta + t'\tau$$
$$u'' = x''\xi + y''\eta + z''\zeta + t''\tau,$$

d. h. liegen zwei verschiedene Punkte (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') der Geraden in der Ebene, so bleiben λ' und λ'' unbestimmt, d. h. jeder Punkt der Geraden liegt in der Ebene. Verschwindet wenigstens einer, z. B. u'', nicht, so erhält man $\lambda'' = -\lambda'\frac{u'}{u''}$, also

$$\left(x' - \frac{u'}{u''}x'',\ y' - \frac{u'}{u''}y'',\ z' - \frac{u'}{u''}z'',\ t' - \frac{u'}{u''}t''\right)$$

als einzigen gemeinsamen Schnittpunkt.

Daraus folgt ferner, daß drei verschiedene Ebenen entweder einen einzigen Schnittpunkt oder eine Gerade gemein haben. Sind $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$,

$\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$ zwei verschiedene Ebenen, so geht offenbar durch ihre Schnittgerade auch die Ebene $\{\xi' l' + \xi'' l'', \eta' l' + \eta'' l'', \zeta' l' + \zeta'' l'', \tau' l' + \tau'' l''\}$, wenn l', l'' zwei beliebige Zahlen sind, die nicht beide verschwinden. Jede Ebene der Schnittgeraden ist hierin enthalten (s. u.).

Zwei verschiedene Punkte (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') bestimmen die eine Gerade, Gesamtheit der Punkte:

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'', \lambda' y' + \lambda'' y'', \lambda' z' + \lambda'' z'', \lambda' t' + \lambda'' t'').$$

Durch einen Punkt (x, y, z, t) gehen alle Ebenen $[\xi, \eta, \zeta, \tau]$, für welche

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0$$

ist; durch eine Gerade gehen alle Ebenen

$$\{\xi' l' + \xi'' l'', \quad \eta' l' + \eta'' l'', \quad \zeta' l' + \zeta'' l'', \quad \tau' l' + \tau'' l''\}.$$

Um die gemeinsamen Ebenen von Punkt und Gerade zu bestimmen, hat man l', l'' gemäß der Gleichung:

$$x(\xi' l' + \xi'' l'') + y(\eta' l' + \eta'' l'') + z(\zeta' l' + \zeta'' l'') + t(\tau' l' + \tau'' l'') = 0$$

oder

$$(x\xi' + y\eta' + z\zeta' + t\tau')l' + (x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + t\tau'')l'' = 0$$

zu ermitteln. Verschwinden die beiden Koeffizienten:

$$\omega' = x\xi' + y\eta' + z\zeta' + t\tau'$$
$$\omega'' = x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + t\tau'',$$

d. h. liegt der Punkt auf der Geraden, so bleiben l', l'' unbestimmt, d. h. jede Ebene der Geraden geht durch den Punkt; verschwindet wenigstens eine der Größen ω', ω'', z. B. ω'', nicht, so erhält man $l'' = -\frac{1}{\omega''}\omega' l'$ und $\left\{\xi' - \frac{\xi''}{\omega''}\omega', \quad \eta' - \frac{\eta''}{\omega''}\omega', \quad \zeta' - \frac{\zeta''}{\omega''}\omega', \quad \tau' - \frac{\tau''}{\omega''}\omega'\right\}$ als einzige gemeinsame Ebene.

Daraus folgt ferner, daß drei verschiedene Punkte entweder eine einzige Ebene oder eine Gerade gemein haben.

Demnach bestimmen zwei verschiedene Geraden eines Punktes eine Ebene, und ebenso zwei verschiedene Geraden einer Ebene einen Punkt.

69. Satz: Sind (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') zwei verschiedene Punkte der Schnittgeraden der beiden verschiedenen Ebenen $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$, so ist in $(\lambda' x' + \lambda'' x'', \lambda' y' + \lambda'' y'', \lambda' z' + \lambda'' z'', \lambda' t' + \lambda'' t'')$ für beliebige Werte von λ', λ'', die nicht beide Null sind, stets ein Punkt und für geeignete Werte von λ', λ'' jeder Punkt (x, y, z, t) der Geraden enthalten.

Beweis: Der Beweis hat mit den sechs Gleichungen zu operieren:

$$(0') \qquad x\xi' + y\eta' + z\zeta' + t\tau' = 0$$
$$(0'') \qquad x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' + t\tau'' = 0$$
$$(1') \qquad x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' + t'\tau' = 0$$
$$(1'') \qquad x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' + t'\tau'' = 0$$
$$(2') \qquad x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' + t''\tau' = 0$$
$$(2'') \qquad x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' + t''\tau'' = 0$$

und betrachtet gesondert die drei möglichen Fälle, daß von den vier Zahlenpaaren (ξ', ξ''), (η', η''), (ζ', ζ''), (τ', τ'') entweder in zweien, oder in einem, oder in keinem beide Zahlen Null sind.

Erster Fall: Z. B. $\xi' = \xi'' = \eta' = \eta'' = 0$. Wäre eine der vier Größen z', z'', t', t'', z. B. $t'' \neq 0$, so würde aus den Gleichungen (2'), (2''):

$$z''\zeta' + t''\tau' = 0$$
$$z''\zeta'' + t''\tau'' = 0$$

zunächst $\zeta'' \neq 0$ folgen, da sonst $\tau'' = \zeta'' = \eta'' = \xi'' = 0$ wäre; also wäre ferner $\tau' = -\frac{1}{t''} z''\zeta' = \tau'' \frac{1}{\zeta''}\zeta'$, woraus mit

$$\zeta' = \zeta'' \frac{1}{\zeta''} \zeta'$$

$$\eta' = \eta'' \frac{1}{\zeta''} \zeta' = 0$$

$$\zeta' = \zeta'' \frac{1}{\zeta''} \zeta' = 0$$

zusammen die Identität der beiden Ebenen folgen würde. Demnach ist t'' und ebenso z', z'', t' von Null verschieden. Da von den vier Paaren (ζ', ζ''), (τ', τ''), (ζ', τ'), (ζ'', τ'') keins zwei verschwindende Zahlen enthalten kann, darf man z. B. $\zeta' \neq 0$, $\tau'' \neq 0$ (oder ebenso $\zeta'' \neq 0$, $\tau' \neq 0$) annehmen. Die Gleichungen (0'), (0'') ergeben

$$z\zeta' + t\tau' = 0$$
$$z\zeta'' + t\tau'' = 0.$$

Wäre eine der Größen z, t, z. B. $z \neq 0$, so würde

$$\zeta' = -\frac{1}{z} t\tau' = \zeta'' \frac{1}{\tau''} \tau',$$

also wie oben die Identität der beiden Ebenen folgen. Demnach ist $z = t = 0$. Von x', x'' ist eine Größe, z. B. $x'' \neq 0$, und es ist $y' - \frac{x'}{x''} y'' \neq 0$, da sonst

$$y' = \frac{x'}{x''} y''$$
$$x' = \frac{x'}{x''} x''$$
$$z' = \frac{x'}{x''} z'' = 0$$
$$t' = \frac{x'}{x''} t'' = 0,$$

also die beiden Punkte (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') nicht verschieden wären. Also kann man

$$\lambda' = \frac{y - \frac{x}{x''} y''}{y' - \frac{x'}{x''} y''}, \quad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

setzen und erhält:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$y = \lambda' y' + \lambda'' y''$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z''$$
$$t = \lambda' t' + \lambda'' t'',$$

wie gefordert.

Zweiter Fall: Z. B. $\xi' = \xi'' = 0$, aber in jedem der drei Paare (η', η''), (ζ', ζ''), (τ', τ'') wenigstens eine nicht verschwindende Größe. Man kann daher z. B. $\zeta' \neq 0$, $\tau' \neq 0$ annehmen. Ferner ist von den vier Größen x', y', x'', y'' mindestens eine, etwa y'', von Null verschieden, da sonst analog wie im ersten Fall $\xi' = \xi'' = \eta' = \eta'' = 0$ folgen würde. Endlich ist auch $x' - \frac{y'}{y''} x'' \neq 0$, da sonst aus

$$x' = \frac{y'}{y''} x''$$
$$y' = \frac{y'}{y''} y''$$

und den Gleichungen (1′), (1″), (2′), (2″) die folgenden:

$$\frac{y'}{y''}(z''\zeta' + t''\tau') = -\frac{y'}{y''}(x''\xi' + y''\eta') = z'\zeta' + t'\tau'$$
$$\frac{y'}{y''}(z''\zeta'' + t''\tau'') = -\frac{y'}{y''}(x''\xi'' + y''\eta'') = z'\zeta'' + t'\tau'',$$

also:

$$\left(\frac{y'}{y''} z'' - z'\right)\left(\zeta' \frac{1}{\tau'} \tau'' - \zeta''\right) = 0,$$
$$\left(\frac{y'}{y''} t'' - t'\right)\left(\tau' \frac{1}{\zeta'} \zeta'' - \tau''\right) = 0,$$

mithin entweder:

$$z' = \frac{y'}{y''} z''$$
$$t' = \frac{y'}{y''} t''$$
$$y' = \frac{y'}{y''} y''$$
$$x' = \frac{y'}{y''} x'',$$

d. h. die Identität der beiden Punkte (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t''), oder:

$$\tau'' = \tau' \frac{1}{\zeta'} \zeta''$$
$$\zeta'' = \zeta' \frac{1}{\zeta'} \zeta''$$
$$\xi'' = \xi' \frac{1}{\zeta'} \zeta''$$
$$\eta'' = -\frac{1}{y''}(x''\xi'' + z''\zeta'' + t''\tau'') = -\frac{1}{y''}(x''\xi' + z''\zeta' + t''\tau')\frac{1}{\zeta'}\zeta'' = \eta' \cdot \frac{1}{\zeta'}\zeta'',$$

d. h. die Identität der beiden Ebenen $\{\xi', \eta', \zeta' \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$ folgen würde. Also kann man

$$\lambda' = \frac{x - \frac{y}{y''} x''}{x' - \frac{y'}{y''} x''}, \quad \lambda'' = \frac{y - \lambda' y'}{y''}$$

setzen und erhält zunächst:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$y = \lambda' y' + \lambda'' y'',$$

und dann aus (0'), (0''), (1'), (1''), (2'), (2''):

$$(z - \lambda' z' - \lambda'' z'')\zeta' + (t - \lambda' t' - \lambda'' t'')\tau' = 0$$
$$(z - \lambda' z' - \lambda'' z'')\zeta'' + (t - \lambda' t' - \lambda'' t'')\tau'' = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, wegen $\zeta' \neq 0$, $\tau' \neq 0$, daß

$$Z = z - \lambda' z' - \lambda'' z'', \qquad T = t - \lambda' t' - \lambda'' t'',$$

beide zugleich $= 0$ oder $\neq 0$ sind. Wäre das letztere der Fall, so würde

$$\tau'' = -\frac{1}{T} Z \zeta'' = \tau' \frac{1}{\zeta'} \zeta''$$
$$\zeta'' = \zeta' \frac{1}{\zeta'} \zeta''$$
$$\xi'' = \xi' \frac{1}{\zeta'} \zeta'' = 0,$$

also wie oben die Identität der beiden Ebenen folgen. Demnach ist auch noch $Z = T = 0$, d. h.:

$$z = \lambda' z' + \lambda'' z''$$

$$t = \lambda' t' + \lambda'' t''.$$

Dritter Fall: In jedem der Paare (ξ', ξ''), (η', η''), (ζ', ζ''), (τ', τ'') ist wenigstens eine Zahl nicht Null. Insbesondere kann man $\zeta' \neq 0$, $\tau'' \neq 0$ annehmen. Es seien nun erstens entweder die drei Zahlen:

$$\zeta' - \frac{\zeta''}{\tau''}\tau', \qquad \eta' - \frac{\eta''}{\tau''}\tau', \qquad \zeta' - \frac{\zeta''}{\tau''}\tau',$$

oder die drei Zahlen:

$$\xi'' - \frac{\xi'}{\zeta'}\zeta'', \qquad \eta'' - \frac{\eta'}{\zeta'}\zeta'', \qquad \tau'' - \frac{\tau'}{\zeta'}\zeta''$$

alle drei von Null verschieden. Es möge dies etwa für die ersten drei Zahlen stattfinden. Von den Zahlen x', x'', y', y'', z', z'' ist mindestens eine, etwa x'', von Null verschieden. Die beiden Ausdrücke $y' - \frac{x'}{x''}y''$, $z' - \frac{x'}{x''}z''$ sind nicht beide Null, da sonst

$$x' = \frac{x'}{x''}x''$$

$$y' = \frac{x'}{x''}y''$$

$$z' = \frac{x'}{x''}z''$$

$$\begin{aligned} t' &= -(x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'')\frac{1}{\tau''} \\ &= -\frac{x'}{x''}(x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'')\frac{1}{\tau''} \\ &= \frac{x'}{x''}t'', \end{aligned}$$

d. h. $(x', y', z', t') = (x'', y'', z'', t'')$ wäre. Ist etwa $y' - \frac{x'}{x''}y'' \neq 0$, so kann man setzen:

$$\lambda' = \frac{y - \frac{x}{x''}y''}{y' - \frac{x'}{x''}y''}, \quad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

und erhält:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$

$$y = \lambda' y' + \lambda'' y'',$$

ferner aus der Gleichung, die aus (0′), (0″), (1′), (1″), (2′), (2″) folgt:

$$(\mathfrak{A})\quad (x-\lambda' x'-\lambda'' x'')\left(\frac{\xi''}{\tau''}\tau'-\xi'\right)+(y-\lambda' y'-\lambda'' y'')\left(\frac{\eta''}{\tau''}\tau'-\eta'\right)$$
$$+(z-\lambda' z'-\lambda'' z'')\left(\frac{\zeta''}{\tau''}\tau'-\zeta'\right)=0$$

wegen $\frac{\zeta''}{\tau''}\tau'-\zeta'\neq 0$ noch

$$z=\lambda' z'+\lambda'' z'',$$

und schließlich aus der Gleichung:

$$(\mathfrak{B})\quad (x-\lambda' x'-\lambda'' x'')\xi''+(y-\lambda' y'-\lambda'' y'')\eta''+(z-\lambda' z'-\lambda'' z'')\zeta''$$
$$+(t-\lambda' t'-\lambda'' t'')\tau''=0$$

wegen $\tau''\neq 0$ noch

$$t=\lambda' t'+\lambda'' t''.$$

Zweitens sei $\xi'-\frac{\xi''}{\tau''}\tau'=0$ und $\xi''-\frac{\xi'}{\zeta'}\zeta''=0$*), so folgt zunächst, da eine der Zahlen $\zeta', \zeta''\neq 0$ ist, daß dies auch für die andere zutrifft und daß auch $\tau'\neq 0$, $\zeta''\neq 0$ ist. Dann gibt die Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{\xi'}{\tau'}=\frac{\xi''}{\tau''}$$
$$\frac{\xi'}{\zeta'}=\frac{\xi''}{\zeta''}$$

die Gleichung:

$$\frac{\zeta'}{\xi'}\cdot\frac{\xi'}{\tau'}=\frac{\zeta''}{\xi''}\cdot\frac{\xi''}{\tau''},$$

d. h.

$$\frac{\zeta'}{\tau'}=\frac{\zeta''}{\tau''}.$$

Wäre nun eine der beiden Zahlen y', y'', etwa y', nicht Null, so würde aus den Gleichungen:

$$\xi'=\xi''\frac{1}{\tau''}\tau'$$
$$\zeta'=\zeta''\frac{1}{\tau''}\tau'$$
$$\tau'=\tau''\frac{1}{\tau''}\tau'$$

noch

$$\eta'=-\frac{1}{y'}(x'\xi'+z'\zeta'+\tau' t')=-\frac{1}{y'}(x'\xi''+z'\zeta''+t'\tau'')\frac{1}{\tau''}\tau'=\eta''\frac{1}{\tau''}\tau',$$

---

*) Analog ist der Fall $\eta'=\frac{\eta''}{\tau''}\tau'$, $\eta''=\frac{\eta'}{\zeta'}\zeta''$ zu behandeln.

d. h. die Identität der beiden Ebenen folgen. Demnach ist $y' = y'' = 0$, also von den vier Zahlen x', x'', z', z'' mindestens eine, etwa $x'' \neq 0$. Ferner ist die Zahl

$$z' - \frac{x'}{x''} z'' \neq 0,$$

da sonst

$$z' = \frac{x'}{x''} z''$$

$$x' = \frac{x'}{x''} x''$$

$$y' = \frac{x'}{x''} y'' = 0$$

und

$$t' = -(x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'')\frac{1}{\tau''} = -\frac{x'}{x''}(x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'')\frac{1}{\tau''} = \frac{x'}{x''} t'',$$

d. h.

$$(x', y', z', t') = (x'', y'', z'', t'')$$

wäre. Man kann also

$$\lambda' = \frac{z - \frac{x}{x''} z''}{z' - \frac{x'}{x''} z''}, \qquad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

setzen und erhält zunächst:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z'';$$

ferner aus der Gleichung $\mathfrak{A}$:

$$y\left(\frac{\eta''}{\tau''}\tau' - \eta'\right) = 0.$$

Wäre nun

$$\eta' = \frac{\eta''}{\tau''}\tau',$$

so ergäbe dies mit den oben erhaltenen Gleichungen:

$$\xi' = \frac{\xi''}{\tau''}\tau', \qquad \zeta' = \frac{\zeta''}{\tau''}\tau'$$

zusammen die Identität der beiden Ebenen. Also ist $y = 0$, folglich auch

$$y = \lambda' y' + \lambda'' y''.$$

Schließlich folgt aus $(\mathfrak{B})$ wegen $\tau \neq 0$, daß auch noch

$$t = \lambda' t' + \lambda'' t''$$

ist.

Drittens sei

$$\xi' - \frac{\xi''}{\tau''}\,\tau' = 0, \quad \eta'' - \frac{\eta'}{\zeta'}\,\zeta'' = 0\,^{*}),$$

so folgt zunächst $\xi'' \neq 0$, $\eta' \neq 0$ und ferner

$$\xi' = \xi''\,\frac{1}{\tau''}\,\tau', \quad \tau' = \tau''\,\frac{1}{\tau''}\,\tau', \quad \eta'' = \eta'\,\frac{1}{\zeta'}\,\zeta'', \quad \zeta'' = \zeta'\,\frac{1}{\zeta'}\,\zeta'',$$

also aus (0'), (0''):

$$(x\xi'' + t\tau'')\,\frac{1}{\tau''}\,\tau' + (y\eta' + z\zeta') = 0$$

$$(x\xi'' + t\tau'') + (y\eta' + z\zeta')\,\frac{1}{\zeta'}\,\zeta'' = 0,$$

woraus

$$(x\xi'' + t\tau'')\left(\frac{1}{\tau''}\,\tau'\,\frac{1}{\zeta'}\,\zeta'' - 1\right) = 0$$

$$(y\eta' + z\zeta')\left(\frac{1}{\zeta'}\,\zeta''\,\frac{1}{\tau''}\,\tau' - 1\right) = 0$$

folgt. Ist nun

$$\frac{1}{\tau''}\,\tau'\,\frac{1}{\zeta'}\,\zeta'' \neq 1,$$

so ergibt sich:

$$(\mathfrak{C})\quad \begin{cases} x = -t\,\dfrac{\tau''}{\xi''}, & t = -x\,\dfrac{\xi''}{\tau''}, \quad y = -z\,\dfrac{\zeta'}{\eta'}, \quad z = -y\,\dfrac{\eta'}{\zeta'}, \\ \text{und ebenso} & \\ x' = -t'\,\dfrac{\tau''}{\xi''}, & t' = -x'\,\dfrac{\xi''}{\tau''}, \quad y' = -z'\,\dfrac{\zeta'}{\eta'}, \quad z' = -y'\,\dfrac{\eta'}{\zeta'}, \\ x'' = -t''\,\dfrac{\tau''}{\xi''}, & t'' = -x''\,\dfrac{\xi''}{\tau''}, \quad y'' = -z''\,\dfrac{\zeta'}{\eta'}, \quad z'' = -y''\,\dfrac{\eta'}{\zeta'}. \end{cases}$$

Von x'', y'', z'', t'' ist mindestens eine Zahl, etwa x'', $\neq 0$. Von den drei Zahlen:

$$y' - \frac{x'}{x''}\,y'', \quad z' - \frac{x'}{x''}\,z'', \quad t' - \frac{x'}{x''}\,t''$$

ist wegen der Verschiedenheit der beiden Punkte mindestens eine, etwa die erste, nicht gleich Null. Man kann also

$$\lambda' = \frac{y - \dfrac{x}{x''}\,y''}{y' - \dfrac{x'}{x''}\,y''}, \quad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

setzen und erhält zunächst:

*) Analog ist der Fall $\xi'' - \frac{\xi'}{\zeta'}\,\zeta'' = \eta' - \frac{\eta''}{\tau''}\,\tau' = 0$ zu behandeln.

alsdann vermittels (𝔈):

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$y = \lambda' y' + \lambda'' y'',$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z''$$
$$t = \lambda' t' + \lambda'' t''.$$

Ist dagegen

$$\frac{1}{\tau''}\tau' \frac{1}{\zeta'}\zeta'' = 1,$$

so folgt:

$$\zeta' = \zeta'' \frac{1}{\tau''}\tau',$$

und aus:

$$(\mathfrak{D}) \quad \begin{cases} x'\left(\xi' - \xi''\frac{1}{\tau''}\tau'\right) + y'\left(\eta' - \eta''\frac{1}{\tau''}\tau'\right) + z'\left(\zeta' - \zeta''\frac{1}{\tau''}\tau'\right) \\ \qquad + t'\left(\tau' - \tau''\frac{1}{\tau''}\tau'\right) = 0, \end{cases}$$

da alle Koeffizienten mit Ausnahme des von y' verschwinden:

$$y' = 0 \text{ und ebenso } y'' = 0.$$

Daher ist von den sechs Zahlen x', x'', z', z'', t', t'' mindestens eine, etwa x'', $\neq 0$, und von den zwei Zahlen $z' - \frac{x'}{x''}z''$, $t' - \frac{x'}{x''}t''$, wegen der Verschiedenheit beider Punkte, wenigstens eine, etwa die erste, ungleich Null. Man kann also

$$\lambda' = \frac{z - \frac{x}{x''}z''}{z' - \frac{x'}{x''}z''}, \quad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

setzen und erhält zunächst:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x''$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z'';$$

alsdann aus (𝔄) und (𝔅):

$$y = \lambda' y' + \lambda'' y'' \; (= 0)$$
$$t = \lambda' t' + \lambda'' t''.$$

Viertens sei

$$\xi' - \frac{\xi''}{\tau''}\tau' = 0, \quad \tau'' - \frac{\tau'}{\zeta'}\zeta'' = 0\text{*}),$$

*) Die analog zu behandelnden Fälle sind:

$$\eta' - \frac{\eta''}{\tau''}\tau' = \tau'' - \frac{\tau'}{\zeta'}\zeta'' = 0, \quad \xi'' - \frac{\xi'}{\zeta'}\zeta' = \zeta' - \frac{\zeta''}{\tau''}\tau' = 0,$$
$$\eta'' - \frac{\eta'}{\zeta'}\zeta' = \zeta' - \frac{\zeta''}{\tau''}\tau' = 0.$$

so folgt zunächst:

$$\xi'' \neq 0, \quad \zeta'' \neq 0, \quad \tau' \neq 0, \quad \xi' \neq 0,$$

alsdann:

$$\xi' = \xi'' \frac{1}{\tau''} \tau',$$

$$\zeta' = \zeta'' \frac{1}{\tau''} \tau',$$

also aus ($\mathfrak{D}$), da

$$\eta' - \eta'' \frac{1}{\tau''} \tau'$$

wegen der Verschiedenheit beider Ebenen nicht verschwindet, $y' = 0$ und ebenso $y'' = 0$. Demnach ist von den Zahlen x'', z'', t'' jedenfalls eine, etwa x'', von Null verschieden, und es ist von den beiden Zahlen $z' - \frac{x'}{x''} z''$, $t' - \frac{x'}{x''} t''$ wenigstens eine, etwa die erste, von Null verschieden. Man kann daher setzen:

$$\lambda' = \frac{z - \frac{x}{x''} z''}{z' - \frac{x'}{x''} z''}, \quad \lambda'' = \frac{x - \lambda' x'}{x''}$$

und erhält zunächst:

$$x = \lambda' x' + \lambda'' x'',$$
$$z = \lambda' z' + \lambda'' z'';$$

alsdann aus ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$):

$$y = \lambda' y' + \lambda'' y''$$
$$t = \lambda' t' + \lambda'' t''.$$

Fünftens sei

$$\zeta' - \frac{\zeta''}{\tau''} \tau' = 0, \quad \tau'' - \frac{\tau'}{\zeta'} \zeta'' = 0,$$

so folgt zunächst, daß $\zeta'' \neq 0$, $\tau' \neq 0$, daß also von x', x'', y', y'' mindestens eine Zahl, etwa x'', $\neq 0$ ist. Ferner folgt aus $\zeta' = \zeta'' \frac{1}{\tau''} \tau'$ und $\tau' = \tau'' \frac{1}{\tau''} \tau'$ und (0′), (0″):

$$x\xi' + y\eta' + (z\zeta'' + t\tau'') \frac{1}{\tau''} \tau' = 0.$$

Ist nun

$$x\xi' + y\eta' = z\zeta'' + t\tau'' = 0,$$

also auch

$$x\xi'' + y\eta'' = z\zeta' + t\tau' = 0,$$

so ergeben sich, da von ξ', ξ'' eins, etwa ξ'', und von η', η'' eins, etwa η'', von Null verschieden ist, die Gleichungen:

$$z = -t\frac{\zeta}{\tau}, \quad t = -z\frac{\tau}{\zeta}, \quad x = -y\frac{\eta}{\xi}, \quad y = -x\frac{\xi}{\eta},$$

und ebenso

(5) $$z' = -t'\frac{\zeta'}{\tau'}, \quad t' = -z'\frac{\tau'}{\zeta'}, \quad x' = -y'\frac{\eta'}{\xi'}, \quad y' = -x'\frac{\xi'}{\eta'},$$

$$z'' = -t''\frac{\zeta''}{\tau''}, \quad t'' = -z''\frac{\tau''}{\zeta''}, \quad x'' = -y''\frac{\eta''}{\xi''}, \quad y'' = -x''\frac{\xi''}{\eta''}.$$

Die beiden Zahlen $z - \frac{\zeta}{\zeta'}z'$, $t - \frac{\zeta}{\zeta'}t'$ sind nicht beide gleich Null, da sich sonst aus den Gleichungen:

$$(y - \tfrac{\zeta}{\zeta'}y')\eta' - (z - \tfrac{\zeta}{\zeta'}z')\zeta' - (t - \tfrac{\zeta}{\zeta'}t')\tau' = 0,$$

$$(y - \tfrac{\zeta}{\zeta'}y')\eta'' - (z - \tfrac{\zeta}{\zeta'}z')\zeta'' - (t - \tfrac{\zeta}{\zeta'}t')\tau'' = 0$$

wegen $y - \frac{\zeta}{\zeta'}y' = 0$: $\eta' = \eta'' = 0$ ergäbe, gegen die Voraussetzung des dritten Falles. Man kann daher z. B. $z - \frac{\zeta}{\zeta'}z' = 0$ annehmen und

$$\lambda = \frac{t - \frac{\zeta}{\zeta'}t'}{z - \frac{\zeta}{\zeta'}z'}, \quad \lambda' = \frac{z - \lambda z}{z'}$$

setzen und erhält zunächst:

$$t = \lambda t - \lambda' t',$$
$$z = \lambda z - \lambda' z'.$$

und hieraus vermittelst der Gleichungen (5):

$$y = \lambda y - \lambda' y',$$
$$x = \lambda x - \lambda' x'.$$

Hiermit ist für alle verschiedenen Arten möglicher Fälle der Satz 69 bewiesen.

70. Satz: Sind $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$ zwei verschiedene Ebenen der Verbindungsgeraden der zwei verschiedenen Punkte (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t''), so ist in

$$\{\xi'\Gamma + \xi''\Gamma', \ \eta'\Gamma - \eta''\Gamma', \ \zeta'\Gamma - \zeta''\Gamma', \ \tau'\Gamma + \tau''\Gamma'\}$$

für beliebige Werte von Γ, Γ', die nicht beide Null sind, stets eine Ebene und für geeignete Werte von Γ, Γ' jede beliebige Ebene der Geraden enthalten.

Beweis analog wie zu 69, oder man folgert den Satz 70 aus 69 vermittelst des Dualitätsprinzips.

71. Satz: Sind (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t''), (x''', y''', z''', t''') drei nicht in einer Geraden liegende Punkte einer Ebene, so ist in

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''',\ \lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''',\ \lambda' z' + \lambda'' z'' + \lambda''' z''',\ \lambda' t' + \lambda'' t'' + \lambda''' t''')$$

für beliebige Werte von $\lambda', \lambda'', \lambda'''$, die nicht zugleich Null sind, stets ein Punkt und für geeignete Werte von $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ jeder beliebige Punkt (x, y, z, t) der Ebene enthalten.

Beweis: Ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $[(x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'')]$ und $[(x, y, z, t), (x''', y''', z''', t''')]$, so hat man den Satz 69 einerseits auf die drei Punkte

$$(x, y, z, t),\ (x''', y''', z''', t'''),\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}),$$

andrerseits auf die drei Punkte

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}),\ (x', y', z', t'),\ (x'', y'', z'', t'')$$

anzuwenden und die Zahlen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ zu eliminieren, um den Satz 71 zu erhalten.

72. Satz: Sind $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$, $\{\xi''', \eta''', \zeta''', \tau'''\}$ drei nicht durch eine Gerade gehende Ebenen eines Punktes, so ist in

$$\{\xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''',\ \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''',\ \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l''',\ \tau' l' + \tau'' l'' + \tau''' l'''\}$$

für beliebige Werte von l', l'', l''', die nicht zugleich Null sind, stets eine Ebene und für geeignete Werte von l', l'', l''' jede beliebige Ebene des Punktes enthalten.

Beweis analog wie zu 71, oder man folgert den Satz 72 aus 71 vermittelst des Dualitätsprinzips.

73. Satz: Sind (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t''), (x''', y''', z''', t'''), $(x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, t^{IV})$ vier nicht in einer Ebene liegende Punkte des Raumes der sämtlichen Punkte (x, y, z, t), so ist in

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'' + \lambda''' x''' + \lambda^{IV} x^{IV},\ \lambda' y' + \lambda'' y'' + \lambda''' y''' + \lambda^{IV} y^{IV},\ \lambda' z' + \lambda'' z'' + \lambda''' z''' + \lambda^{IV} z^{IV},\ \lambda' t' + \lambda'' t'' + \lambda''' t''' + \lambda^{IV} t^{IV})$$

für beliebige Werte von $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$, die nicht zugleich Null sind, stets ein Punkt und für geeignete Werte von $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$ jeder beliebige Punkt (x, y, z, t) des Raumes enthalten.

Beweis: Ist $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ der Schnittpunkt der Ebene

$$\{(x', y', z', t'),\ (x'', y'', z'', t''),\ (x''', y''', z''', t''')\}$$

mit der Geraden

$$[(x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, t^{IV}),\ (x, y, z, t)],$$

so hat man auf die drei Punkte

$$(x, y, z, t), \quad (x^{IV}, y^{IV}, z^{IV}, t^{IV}), \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$$

den Satz 69, auf die vier Punkte

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \quad (x', y', z', t'), \quad (x'', y'', z'', t''), \quad (x''', y''', z''', t''')$$

den Satz 71 anzuwenden und die Zahlen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ zu eliminieren, um den Satz 73 zu erhalten.

74. Satz: Sind $\{\xi', \eta', \zeta', \tau'\}$, $\{\xi'', \eta'', \zeta'', \tau''\}$, $\{\xi''', \eta''', \zeta''', \tau'''\}$, $\{\xi^{IV}, \eta^{IV}, \zeta^{IV}, \tau^{IV}\}$ vier nicht durch einen Punkt gehende Ebenen des Raumes, so ist in

$$\{\xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''' + \xi^{IV} l^{IV}, \quad \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''' + \eta^{IV} l^{IV}, \\ \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l''' + \zeta^{IV} l^{IV}, \quad \tau' l' + \tau'' l'' + \tau''' l''' + \tau^{IV} l^{IV}\}$$

für beliebige Werte von l', l'', l''', l^{IV}, die nicht zugleich Null sind, stets eine Ebene und für geeignete Werte von l', l'', l''', l^{IV} jede beliebige Ebene des Raumes enthalten.

Beweis analog wie zu 73, oder man folgert den Satz 74 aus 73 vermittelst des Dualitätsprinzips.

75. Definition: Die Zahlen x, y, z bzw. x, y, z, t sollen als „Koordinaten" des Punktes (x, y, z) bzw. (x, y, z, t), die Zahlen ξ, η, ζ bzw. ξ, η, ζ, τ als „Koordinaten" der Geraden $[\xi, \eta, \zeta]$ bzw. der Ebene $\{\xi, \eta, \zeta, \tau\}$ und die in 61 und 68 als Geometrien erwiesenen Systeme als „Koordinatengeometrien" bezeichnet werden.

76. Satz: Eine ebene Koordinatengeometrie ist Schnitt einer räumlichen.

Beweis: Man betrachte die Punkte (x, y, z) der ebenen Geometrie als Punkte $(x, y, z, 0)$ der räumlichen Geometrie der Punkte (x, y, z, t) usw.

77. Definition: Ein System

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{pmatrix}$$

heißt vom Range 3 (vgl. I. 94. S. 28), wenn $[\xi', \eta', \zeta']$, $[\xi'', \eta'', \zeta'']$, $[\xi''', \eta''', \zeta''']$ drei nicht durch einen Punkt gehende Gerade, also auch (ξ', ξ'', ξ'''), (η', η'', η'''), $(\zeta', \zeta'', \zeta''')$ drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte sind.

78. Satz: Damit die Größen x, y, z für beliebige, nicht zugleich verschwindende Werte der Größen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x\xi' + y\eta' + z\zeta' &= \bar{x} \\ x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' &= \bar{y} \\ x\xi''' + y\eta''' + z\zeta''' &= \bar{z} \end{aligned}$$

eindeutig ausgerechnet werden können, ist notwendig und hinreichend, daß das System

$$\begin{pmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{pmatrix}$$

vom Range 3 ist.

Beweis: Es sei das System vom Range 3. Da $(\zeta', \zeta'', \zeta''')$ ein Punkt sein soll, so ist wenigstens eine der drei Koordinaten, etwa ζ''', von Null verschieden. Da $(\zeta', \zeta'', \zeta''')$, (η', η'', η''') zwei verschiedene Punkte sein sollen, ist wenigstens eine der Größen:

$$\eta' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta', \qquad \eta'' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta'',$$

etwa die zweite, von Null verschieden. Demnach erhält man

$$l'' = \frac{-1}{\eta'' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta''} \left(\eta' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta'\right) l'$$

$$l''' = \frac{-1}{\zeta'''} \quad (\zeta' l' + \zeta'' l'')$$

als einzige Auflösung der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''' &= 0 \\ \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l''' &= 0, \end{aligned}$$

und da

$$\xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''' \neq 0$$

sein muß, die Gleichung

$$x(\xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''') = \bar{x} l' + \bar{y} l'' + \bar{z} l'''$$

zur eindeutigen Bestimmung von x. Ebenso erhält man y und z.

Ist dagegen das System nicht vom Range 3, so existieren drei nicht zugleich verschwindende Zahlen l', l'', l''', für welche

$$\begin{aligned} \xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''' &= 0 \\ \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''' &= 0 \\ \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l''' &= 0 \end{aligned}$$

ist. Sind nun die gegebenen Zahlen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ so beschaffen, daß $\bar{x} l' + \bar{y} l'' + \bar{z} l''' \neq 0$ ist, so lassen die gegebenen Gleichungen offen-

bar keine Lösung für x, y, z zu. Existiert aber eine solche Lösung x, y, z, ist also $\bar{x}l' + \bar{y}l'' + \bar{z}l''' = 0$, so ist auch $x + kx_0$, $y + ky_0$, $z + kz_0$ für jeden Wert von k eine Lösung der Gleichungen, wenn x_0, y_0, z_0 eine Lösung von zweien, also auch der dritten der Gleichungen ist:

$$x_0\xi' + y_0\eta' + z_0\zeta' = 0$$
$$x_0\xi'' + y_0\eta'' + z_0\zeta'' = 0$$
$$x_0\xi''' + y_0\eta''' + z_0\zeta''' = 0.$$

79. Definition: Durch die drei Gleichungen des Satzes 78 werden jedem Punkte (x, y, z) die neuen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eindeutig zugeordnet. Diesen Übergang von den alten zu den neuen Koordinaten bezeichnet man als „Transformation" der Koordinaten.

80. Satz: Durch Koordinatentransformation wird die Geometrie der Punkte (x, y, z) auf die der Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kollinear abgebildet.

Beweis: Die Eindeutigkeit der Abbildung folgt aus 78. Ferner entsprechen den drei in einer Geraden liegenden Punkten

$$(x', y', z'),\ (x'', y'', z''),\ (\lambda'x' + \lambda''x'',\ \lambda'y' + \lambda''y'',\ \lambda'z' + \lambda''z'')$$

die drei Punkte

$$(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'),\ (\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''),\ (\bar{x}''', \bar{y}''', \bar{z}'''),$$

welche in einer Geraden liegen, weil

$$\bar{x}''' = (\lambda'x' + \lambda''x'')\xi' + (\lambda'y' + \lambda''y'')\eta' + (\lambda'z' + \lambda''z'')\zeta'$$
$$= \lambda'(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta') + \lambda''(x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta') = \lambda'\bar{x}' + \lambda''\bar{x}''$$

und ebenso

$$\bar{y}''' = \lambda'\bar{y}' + \lambda''\bar{y}''$$
$$\bar{z}''' = \lambda'\bar{z}' + \lambda''\bar{z}''$$

ist. Dasselbe gilt umgekehrt, da sich (nach 78) x, y, z durch $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ vermittelst eines Gleichungssystems derselben Form ausdrücken lassen.

81. Aufgabe: Sind $P = (x, y, z)$, $P' = (x', y', z')$, $P'' = (x'', y'', z'')$, $P''' = (x''', y''', z''')$ vier beliebige Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so folgt aus den Axiomen die Existenz von Geraden, welche durch keinen der vier Punkte gehen; z. B. ist $\mathfrak{G} = [([PP'], [P''P''']), ([PP''], [P'P'''])]$ eine solche. Man soll die Koordinaten irgendeiner solchen Geraden angeben.

Auflösung: Man kann z. B. die Koordinaten der Geraden $\mathfrak{G}$ ausrechnen, oder man kann wie folgt verfahren. Da P', P'', P''' nicht

in einer Geraden liegen, kann man (s. 78) $\xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \zeta'', \xi''', \eta''', \zeta'''$ gemäß den Bedingungen:

$$\begin{array}{lll} x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta' \neq 0 & x'\xi'' + y'\eta'' + z'\zeta'' = 0 & x'\xi''' + y'\eta''' + z'\zeta''' = 0 \\ x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta' = 0 & x''\xi'' + y''\eta'' + z''\zeta'' \neq 0 & x''\xi''' + y''\eta''' + z''\zeta''' = 0 \\ x'''\xi' + y'''\eta' + z'''\zeta' = 0 & x'''\xi'' + y'''\eta'' + z'''\zeta'' = 0 & x'''\xi''' + y'''\eta''' + z'''\zeta''' \neq 0 \end{array}$$

bestimmen. Dann ist

$$\lambda' = x\xi' + y\eta' + z\zeta' \neq 0, \quad \lambda'' = x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' \neq 0, \quad \lambda''' = x\xi''' + y\eta''' + z\zeta''' \neq 0,$$

da andernfalls P mit P'', P''', oder mit P', P''', oder mit P', P'' auf einer Geraden läge. Folglich kann man in

$$\xi = \xi' l' + \xi'' l'' + \xi''' l''', \quad \eta = \eta' l' + \eta'' l'' + \eta''' l''', \quad \zeta = \zeta' l' + \zeta'' l'' + \zeta''' l'''$$

die Größen l', l'', l''' stets so wählen, daß

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \lambda' l' + \lambda'' l'' + \lambda''' l''' \neq 0$$

ist. Alsdann ist $[\xi, \eta, \zeta]$ eine Gerade, die durch keinen der vier gegebenen Punkte hindurchgeht.

82. Satz: Zu den gegebenen Werten $\xi''', \eta''', \zeta'''$, die nicht alle Null sind, können $\xi', \eta', \zeta', \xi'', \eta'', \zeta''$ so gefunden werden, daß das System $\begin{pmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{pmatrix}$ vom Range 3 ist.

Beweis: Ist z. B. $\zeta''' \neq 0$, so wähle man der Reihe nach:

$$\zeta'' \neq 0, \quad \xi'' = \text{oder} \neq \frac{\xi'''}{\zeta'''}\zeta'', \quad \eta'' \neq \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta'', \quad \zeta' \neq 0, \quad \eta' \neq \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta',$$

$$\lambda'' = \frac{1}{\eta'' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta''}\left(\eta' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta'\right), \quad \lambda''' = \frac{1}{\zeta'''}(\zeta' - \zeta''\lambda''), \quad \xi' \neq \xi''\lambda'' + \xi'''\lambda''.$$

Dann sind in der Tat $[\xi', \eta', \zeta']$, $[\xi'', \eta'', \zeta'']$, $[\xi''', \eta''', \zeta''']$ drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden, weil die aus den Gleichungen:

$$\zeta' = \zeta''\lambda'' + \zeta'''\lambda'''$$
$$\eta' = \eta''\lambda'' + \eta'''\lambda'''$$

sich ergebenden Werte:

$$\lambda'' = \frac{1}{\eta'' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta''}\left(\eta' - \frac{\eta'''}{\zeta'''}\zeta'\right), \quad \lambda''' = \frac{1}{\zeta'''}(\zeta' - \zeta''\lambda'')$$

der dritten Gleichung:

bar keine Lösung für x, y, z zu. Existiert aber eine solche L
x, y, z, ist also $\bar{x}l' + \bar{y}l'' + \bar{z}l''' = 0$, so ist auch $x + kx_0$, y -
$z + kz_0$ für jeden Wert von k eine Lösung der Gleichungen,
x_0, y_0, z_0 eine Lösung von zweien, also auch der dritten der
chungen ist:

$$x_0\xi' + y_0\eta' + z_0\zeta' = 0$$
$$x_0\xi'' + y_0\eta'' + z_0\zeta'' = 0$$
$$x_0\xi''' + y_0\eta''' + z_0\zeta''' = 0.$$

79. Definition: Durch die drei Gleichungen des Satz
werden jedem Punkte (x, y, z) die neuen Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ein
zugeordnet. Diesen Übergang von den alten zu den neuen K
naten bezeichnet man als „Transformation" der Koordinaten.

80. Satz: Durch Koordinatentransformation wird die Geo
der Punkte (x, y, z) auf die der Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ kollinear abge

Beweis: Die Eindeutigkeit der Abbildung folgt aus 78.
entsprechen den drei in einer Geraden liegenden Punkten

$$(x', y', z'),\ (x'', y'', z''),\ (\lambda'x' + \lambda''x'',\ \lambda'y' + \lambda''y'',\ \lambda'z' + \lambda''z'$$

die drei Punkte

$$(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'),\ (\bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''),\ (\bar{x}''', \bar{y}''', \bar{z}'''),$$

welche in einer Geraden liegen, weil

$$\bar{x}''' = (\lambda'x' + \lambda''x'')\xi' + (\lambda'y' + \lambda''y'')\eta' + (\lambda'z' + \lambda''z'')\zeta'$$
$$= \lambda'(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta') + \lambda''(x''\xi' + y''\eta' + z''\zeta') = \lambda'\bar{x}' +$$

und ebenso

$$\bar{y}''' = \lambda'\bar{y}' + \lambda''\bar{y}''$$
$$\bar{z}''' = \lambda'\bar{z}' + \lambda''\bar{z}''$$

ist. Dasselbe gilt umgekehrt, da sich (nach 78) x, y, z du
vermittelst eines Gleichungssystems derselben Form ausdrü

81. Aufgabe: Sind $P = (x, y, z)$, $P' = (x', y', z')$, P''
$P''' = (x''', y''', z''')$ vier beliebige Punkte, von denen ke
einer Geraden liegen, so folgt aus den Axiomen die E
Geraden, welche durch keinen der vier Punkte gehe
$\mathfrak{G} = [([PP'], [P''P''']), ([PP''], [P'P'''])]$ eine solche.
Koordinaten irgendeiner solchen Geraden

Auflösung: Man kann z. B. die K
rechnen, oder man kann wie folgt ve

$$\xi' = \xi''\lambda'' + \xi'''\lambda'''$$

nicht genügen.

83. Satz: Vier beliebigen Punkten, von denen keine drei in einer Geraden liegen, kann man durch Koordinatentransformation die Koordinaten beilegen:

$$(0, 0, 1),\quad (0, 1, 1),\quad (1, 0, 1),\quad (1, 1, 1).$$

Beweis: Man kann zunächst nach 81 und 82 die vier Punkte durch eine Transformation in (a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) derart überführen, daß keine der Koordinaten c_0, c_1, c_2, c_3 Null ist.

Alsdann wende man der Reihe nach die folgenden Transformationen an.

Erstens, je nachdem $a_0 \neq 0$ oder $= 0$ ist, mache man die Transformation:

$$\begin{array}{lcl} x \parallel \frac{x}{a_0} - \frac{z}{c_0} & \text{oder} & x \parallel x \\ y \parallel y & & y \parallel y \\ z \parallel z & & z \parallel z; \end{array}$$

je nachdem $b_0 \neq 0$ oder $= 0$ ist, mache man die Transformation:

$$\begin{array}{lcl} x \parallel x & \text{oder} & x \parallel x \\ y \parallel \frac{y}{b_0} - \frac{z}{c_0} & & y \parallel y \\ z \parallel z & & z \parallel z; \end{array}$$

dann mögen die neuen Koordinaten der vier Punkte heißen:

$$(0, 0, c_0),\quad (a_1, b_1, c_1),\quad (a_2, b_2, c_2),\quad (a_3, b_3, c_3);$$

zweitens, je nachdem $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ oder $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$ oder $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ ist ($a_1 = b_1 = 0$ ist unmöglich, weil sonst der zweite Punkt identisch mit dem ersten wäre) transformiere man:

$$\begin{array}{lclcl} x \parallel x & \text{oder} & x \parallel y & \text{oder} & x \parallel \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1} \\ y \parallel y & & y \parallel x & & y \parallel y \\ z \parallel z & & z \parallel z & & z \parallel z; \end{array}$$

dann seien die neuen Koordinaten:

$$(0, 0, c_0),\quad (0, b_1, c_1),\quad (a_2, b_2, c_2),\quad (a_3, b_3, c_3);$$

drittens ist zunächst $a_2 \neq 0$, da sonst die drei ersten Punkte in einer Geraden lägen; je nachdem nun $b_2 \neq 0$ oder $= 0$ ist, transformiere man:

$$x \parallel x \qquad \text{oder} \qquad x \parallel x$$
$$y \parallel \frac{x}{a_2} - \frac{y}{b_2} \qquad\qquad y \parallel y$$
$$z \parallel z \qquad\qquad z \parallel z;$$

dann seien die neuen Koordinaten:

$$(0, 0, c_0), \quad (0, b_1, c_1), \quad (a_2, 0, c_2), \quad (a_3, b_3, c_3);$$

viertens ist zunächst $a_3 \neq 0$, da sonst der letzte Punkt mit den zwei ersten in einer Geraden läge, und $b_3 \neq 0$, da sonst der erste Punkt mit den zwei letzten in einer Geraden läge; also kann man transformieren:

$$x \parallel \frac{x}{a_3}$$
$$y \parallel \frac{y}{b_3}$$
$$z \parallel z$$

und erhält als neue Koordinaten:

$$(0, 0, c_0), \quad (0, b_1, c_1), \quad (a_2, 0, c_2), \quad (1, 1, c_3);$$

fünftens ist zunächst:

$$c_3 \neq \frac{1}{b_1} c_1 + \frac{1}{a_2} c_2;$$

denn sonst würde hieraus und aus

$$1 = \frac{1}{b_1} 0 + \frac{1}{a_2} a_2$$
$$1 = \frac{1}{b_1} b_1 + \frac{1}{a_2} 0$$

folgen, daß die drei letzten Punkte in einer Geraden liegen; also kann man γ aus

$$\gamma \left(\frac{1}{b_1} c_1 + \frac{1}{a_2} c_2 - c_3 \right) = 1,$$

und dann α und β aus

$$1 - \beta = \frac{1}{b_1} c_1 \gamma$$
$$1 - \alpha = \frac{1}{a_2} c_2 \gamma$$

bestimmen und die Transformation machen:

$$x \parallel x$$
$$y \parallel y$$
$$z \parallel x\alpha + y\beta + z\gamma;$$

dadurch wird:

$$b_1 = b_1\beta + c_1\gamma$$
$$a_2 = a_2\alpha + c_2\gamma$$
$$1 = \alpha + \beta + c_3\gamma,$$

also werden die neuen Koordinaten:

$$(0, 0, c_0), \quad (0, c_1, c_1), \quad (c_2, 0, c_2), \quad (1, 1, 1),$$

oder, was dasselbe ist:

$$(0, 0, 1), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 1).$$

84. Satz: In einer ebenen Koordinatengeometrie gilt der Desarguessche Satz.

Beweis: Von den Punkten O, A, B, C der Figur des Desarguesschen Satzes (48) liegen keine drei in einer Geraden, also kann man ihnen (nach 83) die Koordinaten (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) beilegen. Die Koordinaten der Punkte A', B', C' seien dann

$$(0, \mu, \mu'), \quad (\lambda, 0, \lambda'), \quad (\nu, \nu, \nu'),$$

wo $\mu - \mu'$, $\lambda - \lambda'$, $\nu - \nu'$ von Null verschieden sind, da sonst resp. A und A', B und B', C und C' zusammenfielen.

Den Schnittpunkt der Geraden [(0, 1, 1), (1, 0, 1)] mit der Geraden $[(0, \mu, \mu'), (\lambda, 0, \lambda')]$ berechnet man aus den Gleichungen:

$$\xi \cdot 1 + \xi' \cdot 0 = \gamma \cdot \lambda + \eta' . 0$$
$$\xi \cdot 0 + \xi' \cdot 1 = \eta \cdot 0 + \gamma' \cdot \mu$$
$$\xi \cdot 1 + \xi' \cdot 1 = \gamma \cdot \lambda' + \gamma' \cdot \mu',$$

welche
$$\xi = \gamma\lambda, \quad \xi' = \gamma'\mu,$$
also
$$\gamma(\lambda - \lambda') = \gamma'(\mu' - \mu)$$
ergeben. Man kann daher

$$\gamma = \frac{1}{\lambda - \lambda'}, \quad \gamma' = \frac{-1}{\mu - \mu'}$$

setzen und erhält als Schnittpunkt:

$$\left(\frac{1}{\lambda - \lambda'}\lambda, \quad \frac{-1}{\mu - \mu'}\mu, \quad \frac{1}{\lambda - \lambda'}\lambda' - \frac{1}{\mu - \mu'}\mu'\right).$$

Ebenso ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden [(1, 0, 1), (1, 1, 1)] mit der Geraden $[(\lambda, 0, \lambda'), (\nu, \nu, \nu')]$ der Punkt:

$$\left(\frac{-1}{\lambda - \lambda'}\lambda + \frac{1}{\nu - \nu'}\nu, \quad \frac{1}{\nu - \nu'}\nu, \quad \frac{-1}{\lambda - \lambda'}\lambda' + \frac{1}{\nu - \nu'}\nu'\right),$$

und als Schnittpunkt der Geraden:

[(0, 1, 1), (1, 1, 1)] mit der Geraden $[(0, \mu, \mu'), (\nu, \nu, \nu')]$

der Punkt:

$$\left(\frac{-1}{\nu-\nu'}\nu, \quad \frac{1}{\mu-\mu'}\mu - \frac{1}{\nu-\nu'}\nu, \quad \frac{1}{\mu-\mu'}\mu' - \frac{1}{\nu-\nu'}\nu'\right).$$

Daß diese drei Punkte, wie es der Desarguessche Satz verlangt, in einer Geraden liegen, folgt daraus, daß die Summen ihrer entsprechenden Koordinaten verschwinden.

85. Definition: Sind

$$P' = (x', y', z'), \quad P'' = (x'', y'', z''),$$
$$P = (\lambda' x' + \lambda'' x'', \quad \lambda' y' + \lambda'' y'', \quad \lambda' z' + \lambda'' z'')$$

drei Punkte einer Geraden, so soll die Beziehung zwischen den drei Punkten kurz durch

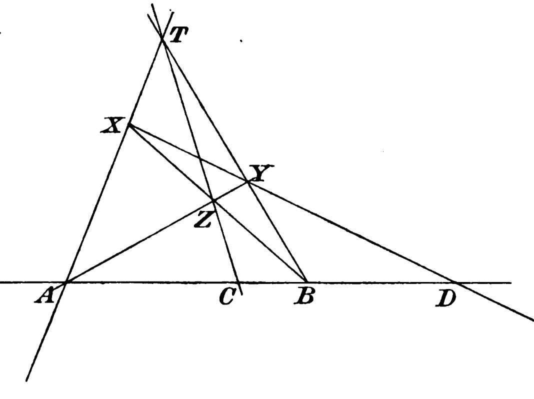
$$P = \lambda' P' + \lambda'' P''$$

ausgedrückt und es sollen λ', λ'' als die (homogenen) Koordinaten des Punktes P der Geraden $[P'P'']$ in bezug auf die Grundpunkte P', P'' bezeichnet werden. Schon für $\lambda' = 1$ und beliebige λ'' erhält man alle Punkte der Geraden, außer P''. Für einen beliebigen dieser Punkte kann man $\lambda'' = 1$ annehmen, da man die Koordinaten von P'' mit einem willkürlichen Faktor multiplizieren darf.

86. Definition: Sind X, Y, Z, T vier Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so sollen die vier Punkte

$$A = ([TX][YZ]),$$
$$B = ([TY][ZX]),$$
$$C = ([TZ][AB]),$$
$$D = ([AB][XY])$$

in der Ordnung A, B, C, D harmonisch heißen (s. Fig.).



87. Satz: Sind A, B, C, D vier harmonische Punkte, dann auch B, A, C, D und A, B, D, C und B, A, D, C.

Beweis folgt aus der Symmetrie der definierenden Konstruktion 86.

88. Erster Harmoniesatz: Durch irgend drei von vier harmonischen Punkten ist der vierte eindeutig bestimmt.

Beweis: Es seien z. B. A, B, C gegeben und $C = A + B$ (s. 85). Wählt man den Punkt Z außerhalb $[AB]$ beliebig, so wird jeder

Punkt $T \neq C$ auf $[CZ]$ durch $T = C + \lambda Z$ gegeben. Infolgedessen werden durch

$$X = B + \lambda Z = -A + T, \quad Y = A + \lambda Z = -B + T$$

die Punkte $X = ([BZ][AT])$, $Y = ([AZ][BT])$ definiert. Für den Punkt $D = ([XY][AB])$ ergibt sich daher $D = Y - X = A - B$, unabhängig von X, Y, Z, T. Ist aber A oder B der gesuchte Punkt, so erhält man aus $C = A + B$, $D = A - B$, daß $A = C + D$, $B = C - D$ ist.

89. Zweiter Harmoniesatz: Wenn A, B, C, D harmonisch sind, dann auch C, D, A, B.

Beweis für Koordinaten-Geometrien: Nimmt man die Gleichungen $C = A + B$, $D = A - B$ als Definition der Harmonie von A, B, C, D, dann folgt daraus $A = C + D$, $B = C - D$, also die Harmonie von C, D, A, B.

90. Aufgabe: Zu drei Punkten A, B, C einer Geraden den vierten harmonischen D zu konstruieren.

Auflösung: Man wähle Z beliebig außerhalb $[AB]$, $T \neq C$ beliebig auf $[CZ]$, so ist

$$D = ([AB], [([AT], [BZ]), ([AZ], [BT])]).$$

91. Satz: Man kann durch Koordinatentransformation erreichen, daß von den neuen Koordinaten a_h, b_h, c_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$ einer beliebigen endlichen Anzahl n gegebener Punkte (a_h, b_h, c_h) einer Geraden stets $b_h \neq 0$, $c_h = 0$ ist.

Beweis: Man mache zunächst vermittelst 83 eine Transformation, durch welche zwei beliebige Punkte der Geraden in $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ transformiert werden. Dann ist jeder Punkt der Geraden in $(x, y, 0)$ enthalten. Sind nun $(a_h, b_h, 0)$ die gegebenen Punkte, so wähle man $\xi'' \neq 0$ beliebig, ζ'' beliebig,

$$\eta'' \neq 0 \text{ und so, daß } b_h \eta'' \neq -a_h \xi'' \text{ ist,} \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

ergänze das System: $\begin{pmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wie in 82 und mache die Transformation:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\xi' + y\eta' + z\zeta' \\ \bar{y} &= x\xi'' + y\eta'' + z\zeta'' \\ \bar{z} &= \qquad\qquad\quad z. \end{aligned}$$

Sind dann $\bar{a}_h, \bar{b}_h, \bar{c}_h$ die neuen Koordinaten des Punktes $(a_h, b_h, 0)$, so ist

$$\begin{aligned} \bar b_k &= a_k \xi'' + b_k \eta'' \neq 0 \\ \bar c_k &= c_k = 0. \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

92. Definition: Nach Ausführung der Transformation des Satzes 91 soll $\frac{1}{b} a$ die „Abszisse" des Punktes $(a, b, 0)$ heißen.

93. Satz: Vier harmonische Punkte einer Geraden haben vier harmonische Abszissen.

Beweis: Sind a, b, c, d die vier Abszissen der vier harmonischen Punkte A, B, C, D, so folgt aus den Relationen in 88 vermittelst 85:

$$(\lambda + \mu)\, c = \lambda a + \mu b$$
$$(\lambda - \mu)\, d = \lambda a - \mu b,$$

also:

$$-\frac{1}{\lambda}\mu = \frac{a - c}{b - c} = -\frac{a - d}{b - d}$$

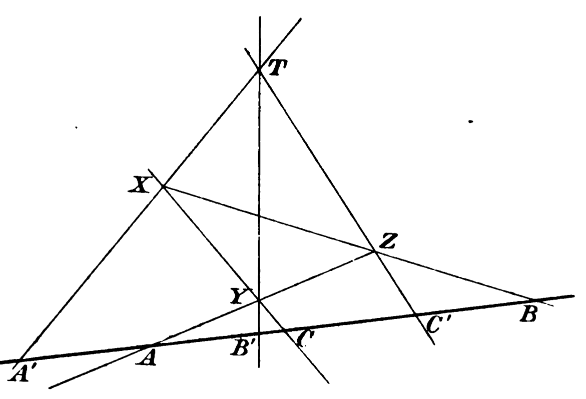
oder

$$\frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d} = -1,$$

welches nach I 107 (S. 33) die Definition der Harmonie für vier Zahlen a, b, c, d ist.

94. Definition: Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gerade, und sind X, Y, Z, T mit $\mathfrak{G}$ in einer Ebene vier beliebige Punkte, von denen keiner auf $\mathfrak{G}$, keine drei in einer Geraden liegen, so heißen die sechs Punkte

$$\begin{aligned} A &= (\mathfrak{G}, [YZ]), \\ B &= (\mathfrak{G}, [ZX]), \\ C &= (\mathfrak{G}, [XY]); \\ A' &= (\mathfrak{G}, [TX]), \\ B' &= (\mathfrak{G}, [TY]), \\ C' &= (\mathfrak{G}, [TZ]) \end{aligned}$$



in der Anordnung $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ involutorisch (s. Fig.).

95. Satz: Sind die Punkte A, B, C, A', B', C' in der Anordnung $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ involutorisch, dann auch in den Anordnungen:

$$\begin{pmatrix} A & B' & C' \\ A' & B & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A' & B & C' \\ A & B' & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A' & B' & C \\ A & B & C' \end{pmatrix}$$

und in den 24 durch Kolonnen-Permutation aus diesen vier Anordnungen hervorgehenden.

Beweis folgt aus der Symmetrie der definierenden Konstruktion 94.

96. Erster Involutions-Satz: Durch irgend fünf von sechs involutorischen Punkten ist der sechste eindeutig bestimmt.

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned} A' &= \alpha A + \alpha_1 B & \alpha + \alpha_1 &= 1 \\ B' &= \beta A + \beta_1 B & \beta + \beta_1 &= 1 \\ C' &= \gamma\alpha A + \delta\beta_1 B & \gamma\alpha + \delta\beta_1 &= 1. \end{aligned}$$

Wählt man T beliebig, Z auf $[C'T]$:

$$Z = zC' + z_1 T = z\gamma\alpha A + z\delta\beta_1 B + z_1 T, \qquad (z + z_1 = 1)$$

so erhält man zur Bestimmung von $X = ([A'T], [BZ])$ die Gleichungen:

$$X = xA' + x_1 T = x\alpha A + x\alpha_1 B + x_1 T, \qquad (x + x_1 = 1)$$

und

$$X = \xi B + \xi_1 Z = \xi B + \xi_1 z\gamma\alpha A + \xi_1 z\delta\beta_1 B + \xi_1 z_1 T, \qquad (\xi + \xi_1 = 1)$$

aus denen

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 z\gamma \\ x\alpha_1 &= \xi + \xi_1 z\delta\beta_1 \\ x_1 &= \xi_1 z_1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \xi_1 z(\delta\beta_1 - \gamma\alpha_1) &= -\xi = -1 + \xi_1 \\ \xi_1 &= \frac{1}{z_1 + z\gamma} \\ x = \xi_1 z\gamma &= \frac{1}{z_1 + z\gamma} z\gamma \\ x_1 = \xi_1 z_1 &= \frac{1}{z_1 + z\gamma} z_1 \end{aligned}$$

$$X = \frac{1}{z_1 + z\gamma} z\gamma\alpha A + \frac{1}{z_1 + z\gamma} z\gamma\alpha_1 B + \frac{1}{z_1 + z\gamma} z_1 T$$

folgt. Ebenso ergibt sich für $Y = ([B'T], [AZ])$:

$$Y = \frac{1}{z_1 + z\delta} z\delta\beta A + \frac{1}{z_1 + z\delta} z\delta\beta_1 B + \frac{1}{z_1 + z\delta} z_1 T.$$

Demnach hat man zur Bestimmung von $C = ([AB], [XY])$:

$$C = \left(\frac{\varepsilon}{z_1 + z\gamma} z\gamma\alpha + \frac{\varepsilon_1}{z_1 + z\delta} z\delta\beta\right) A + \left(\frac{\varepsilon}{z_1 + z\gamma} z\gamma\alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{z_1 + z\delta} z\delta\beta_1\right) B,$$

wo ε und ε_1 so zu bestimmen sind, daß

$$\frac{\varepsilon}{z_1 + z\gamma} z_1 + \frac{\varepsilon_1}{z_1 + z\delta} z_1 = 0$$
$$\varepsilon + \varepsilon_1 = 1$$

wird. Das ergibt:

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - \delta} \cdot \frac{1}{z}(z_1 + z\gamma), \quad \varepsilon_1 = \frac{-1}{\gamma - \delta} \cdot \frac{1}{z}(z_1 + z\delta),$$

$$(\gamma - \delta)\, C = \delta_1 A - \gamma_1 B, \qquad \begin{pmatrix} \gamma + \gamma_1 = 1 \\ \delta + \delta_1 = 1 \end{pmatrix}$$

unabhängig von T und Z, eindeutig abhängig von A, B, A', B', C', da $\gamma - \delta$ wegen $A \neq B$ von Null verschieden ist.

Um C' aus A, B, C, A', B' zu ermitteln, kann man ebenso verfahren oder auch die obigen Gleichungen:

$$A' = \alpha A + \alpha_1 B$$
$$B' = \beta A + \beta_1 B$$
$$C' = \gamma\alpha A + \delta\beta_1 B$$
$$C = \frac{1}{\gamma - \delta} \delta_1 A - \frac{1}{\gamma - \delta} \gamma_1 B$$

benutzen. Diese ergeben:

$$A = \frac{\beta_1}{\alpha - \beta} A' + \frac{-\alpha_1}{\alpha - \beta} B'$$
$$B = \frac{-\beta}{\alpha - \beta} A' + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} B'$$
$$C = \frac{1}{\gamma - \delta} \gamma A' + \frac{-1}{\gamma - \delta} \delta B'$$
$$C' = \delta_1 \frac{\beta_1}{\alpha - \beta} A' + \gamma_1 \frac{\alpha}{\alpha - \beta} B'.$$

97. Zweiter Involutions-Satz: Sechs Punkte A, B, C, A', B', C' einer Geraden sind in den Anordnungen

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix},$$

also (nach 95) auch

$$\begin{pmatrix} A' & B & C \\ A & B' & C' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B' & C \\ A' & B & C' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & C' \\ A' & B' & C \end{pmatrix}$$

stets zugleich involutorisch, wenn und nur wenn in dem zugrunde liegenden Zahlensystem das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.

Beweis: Würden z. B. in der durch die Gleichungen

$$A' = \alpha A + \alpha_1 B$$
$$B' = \beta A + \beta_1 B$$
$$C' = \gamma\alpha A + \delta\beta_1 B$$
$$C = \frac{1}{\gamma - \delta}\delta_1 A - \frac{1}{\gamma - \delta}\gamma_1 B$$

definierten Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ die Punkte C und C' vertauschbar sein, so müßten zwei Zahlen $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ den Gleichungen

$$C = \bar{\gamma}\alpha A + \delta\beta_1 B$$
$$C' = \frac{1}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}}\bar{\delta}_1 A - \frac{1}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}}\bar{\gamma}_1 B \qquad \begin{pmatrix} \bar{\gamma} + \bar{\gamma}_1 = 1 \\ \bar{\delta} + \bar{\delta}_1 = 1 \end{pmatrix}$$

entsprechend gefunden werden können. Die Vergleichung ergibt:

$$\frac{1}{\gamma - \delta}\delta_1 = \bar{\gamma}\alpha, \quad \frac{1}{\gamma - \delta}\gamma_1 = -\bar{\delta}\beta_1 \tag{1}$$

$$\gamma\alpha = \frac{1}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}}\bar{\delta}_1, \quad -\delta\beta_1 = \frac{1}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}}\bar{\gamma}_1. \tag{2}$$

Die Gleichungen (2) ergeben:

$$\bar{\gamma}_1\gamma\alpha = \bar{\gamma}_1\frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\gamma}_1}\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_1\frac{1}{\bar{\delta}_1 - \bar{\gamma}_1}\bar{\gamma}_1 = -\bar{\delta}_1\delta\beta_1 .$$

Setzt man daher

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\varrho}{\gamma\alpha}, \quad \bar{\delta}_1 = -\frac{\varrho}{\delta\beta_1}$$

in die Gleichungen (1) ein und eliminiert ϱ, so kommt:

$$\frac{1}{\gamma - \delta}\left(\frac{\delta_1}{\alpha}\gamma\alpha - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\delta\beta_1\right) = 1,$$

eine Gleichung, die zwar identisch erfüllt ist, wenn α, β, γ, δ einem Zahlensystem mit kommutativer Multiplikation angehören, aber sonst im allgemeinen nicht. Denn setzt man z. B. für β_1 und δ ganze Zahlen und $\delta \neq 1$, so kommt

$$(\gamma\alpha - \alpha\gamma)(1 - \delta) = 0,$$

also

$$\alpha\gamma = \gamma\alpha,$$

für zwei beliebige Zahlen α und γ des Systems.

98. Aufgabe: Den Punkt C zu konstruieren, wenn die fünf übrigen Punkte der Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ gegeben sind.

Auflösung: Man wähle T nicht auf $[AB]$, sonst beliebig, $Z \neq C'$, $\neq T$, sonst beliebig auf $[C'T]$ und konstruiere:

$$X = ([BZ], [A'T]), \quad Y = ([AZ], [B'T]), \quad C = ([XY], [AB]).$$

99. Aufgabe: Den Punkt C' zu konstruieren, wenn die fünf übrigen Punkte der Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ gegeben sind.

Auflösung: Man wähle T beliebig, aber nicht auf $[AB]$, $X \neq A'$, $\neq T$, sonst beliebig auf $[A'T]$ und konstruiere:

$$Y = ([B'T], [CX]), \quad Z = ([BX], [AY]), \quad C' = ([ZT], [AB]).$$

100. Satz: Sechs involutorische Punkte $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ haben sechs involutorische Abszissen.

Beweis: Die Gleichungen aus 96 ergeben:

$$(1) \qquad \begin{cases} a' = \alpha a + \alpha_1 b & \alpha + \alpha_1 = 1 \\ b' = \beta a + \beta_1 b & \beta + \beta_1 = 1 \end{cases}$$

$$(2) \qquad c' = \gamma \alpha a + \delta \beta_1 b \qquad \gamma \alpha + \delta \beta_1 = 1$$

$$(3) \qquad (\gamma - \delta)\, c = (\gamma \alpha - \delta \beta)\, a + (\gamma \alpha' - \delta \beta')\, b.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt:

$$\alpha = \frac{a' - b}{a - b}, \quad \alpha_1 = \frac{a - a'}{a - b}, \quad \beta = \frac{b' - b}{a - b}, \quad \beta_1 = \frac{a - b'}{a - b},$$

aus den Gleichungen (2):

$$\gamma \alpha = \frac{c' - b}{a - b}, \quad \delta \beta_1 = \frac{a - c'}{a - b},$$

also:

$$\gamma = \frac{c' - b}{a' - b}, \qquad \delta = \frac{a - c'}{a - b'}.$$

Setzt man die gefundenen Werte in die Gleichung (3) ein, so erhält man:

$$\left(\frac{c' - b}{a' - b} - \frac{a - c'}{a - b'}\right) c = \frac{c' - b'}{a - b'}\, a + \frac{c' - a'}{a' - b}\, b,$$

also:

$$\left(\frac{a - c'}{a - b'} - 1\right)(a - c) = -\left(\frac{c' - b}{a' - b} - 1\right)(c - b)$$

$$\frac{b' - c'}{b' - a}\,(a - c) = \frac{a' - c'}{a' - b}\,(c - b),$$

d. h.

$$(a - c)\,(b - c)^{-1}\,(b - a') = -\,(b' - a)\,(b' - c')^{-1}\,(a' - c')$$

oder

$$(abca') = (ac'b'a'),$$

welche Gleichung in I 110 (S. 34) als definierende Relation für eine Involution von sechs Zahlen $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ aufgestellt wurde.

101. Satz: Der erste Involutionssatz (96) und der ebene Desarguessche Satz sind gleichwertig; jeder ist eine Folge des andern.

Beweis: Erstens folgt aus dem Involutionssatz der Desarguessche Satz. Denn gehen $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ durch den Punkt O, so sind auf der Geraden $\mathfrak{G} = [([AC], [A'C']), ([BC], [B'C'])]$ in Involution einerseits die Punkte:

$$(\mathfrak{G}, [BC]), \quad (\mathfrak{G}, [AB]), \quad (\mathfrak{G}, [CA],$$
$$(\mathfrak{G}, [OA]), \quad (\mathfrak{G}, [OB], \quad (\mathfrak{G}, [OC]),$$

andererseits die Punkte:

$$(\mathfrak{G}, [B'C']), \quad (\mathfrak{G}, [A'B']), \quad (\mathfrak{G}, [C'A']),$$
$$(\mathfrak{G}, [OA']), \quad (\mathfrak{G}, [OB')], \quad (\mathfrak{G}, [OC']);$$

also ist $(\mathfrak{G}, [CA]) = (\mathfrak{G}, [C'A'])$, da die Involutionen in ihren fünf übrigen Punkten übereinstimmen.

Zweitens folgt aus dem Desarguesschen Satz der erste Involutionssatz. In der Figur von 94 nehme man einen beliebigen Punkt T_1 und X_1 beliebig auf $[A'T_1]$ und konstruiere:

$$Y_1 = ([B'T_1], [CX_1], \quad Z_1 = ([AY_1], [BX_1]), \quad \bar{C} = (\mathfrak{G}, [Z_1T_1]);$$

so soll $\bar{C} = C'$ erwiesen werden. Man kann den Beweis auf den Fall beschränken, daß die ganze Figur in einer Ebene $\mathsf{E} = \{XYZ\}$ liegt, da man sonst, nach Annahme eines beliebigen Punktes S außerhalb E und $\{X_1, Y_1, Z_1\}$, statt X_1, Y_1, Z_1, T_1 nur die Punkte

$$(\mathsf{E}, [SX_1]), \quad (\mathsf{E}, [SY_1]), \quad (\mathsf{E}, [SZ_1]), \quad (\mathsf{E}, [ST_1])$$

einzuführen braucht.

Die Schnittpunkte A, B, C entsprechender Seiten der beiden Dreiecke X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 liegen auf einer Geraden $\mathfrak{G}$; demnach gehen $[XX_1]$, $[YY_1]$, $[ZZ_1]$ durch einen Punkt $O = ([XX_1], [YY_1])$. Dasselbe gilt für die Dreiecke X, Y, T und X_1, Y_1, T_1; demnach geht $[TT_1]$ durch denselben Punkt O. Also gehen die Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke Y, Z, T und Y_1, Z_1, T_1 durch einen Punkt O; also liegen deren Schnittpunkte entsprechender Seiten:

$$([YZ], [Y_1Z_1]) = A, \quad ([YT], [Y_1T_1]) = B', \quad ([ZT], [Z_1T_1])$$

auf einer Geraden, d. h. die Geraden $[ZT]$ und $[Z_1T_1]$ schneiden die Gerade $[AB'] = \mathfrak{G}$ in demselben Punkte $\bar{C} = C'$.

102. Satz: Für $A = A'$, $B = B'$ geht die Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ in die Harmonie der vier Punkte A, B, C, C' über.

Beweis folgt aus den definierenden Konstruktionen für Harmonie und Involution.

103. Satz: Wenn nur der erste Harmoniesatz gilt, so ist mit $ABCD$ zugleich $A'B'C'D$ harmonisch, wenn und nur wenn $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ durch einen Punkt T gehen.

Beweis: Ist $([A'B], [AB']) = U$, so geht $[TU]$ wegen der Harmonie von A, B, C, D durch C, also auch durch C', d. h. auch A', B', C', D liegen harmonisch.

104. Satz: Wenn nur der erste Harmoniesatz gilt, so ist mit $ABCD$ zugleich $A'B'C'D'$ harmonisch, wenn $\mathfrak{A} = [AA']$, $\mathfrak{B} = [BB']$, $\mathfrak{C} = [CC']$, $\mathfrak{D} = [DD']$ durch einen Punkt gehen.

Beweis: Ist $[C'D] = \mathfrak{G}$, so sind nach Satz 103 zunächst $(\mathfrak{A}\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{D}\mathfrak{G})$ und dann nach demselben Satze A', B', C', D' harmonisch.

105. Satz: Wenn nur der erste Harmoniesatz gilt, so gilt auch der zweite, und zwar nicht nur in einer Koordinatengeometrie.

Beweis: Nach Satz 103 müssen (in derselben Bezeichnung) U, T, C, C' harmonisch sein, da $[AU]$, $[BT]$, $[C'D]$ durch einen Punkt B' gehen. Setzt man also $([UB'], [TD]) = V$, $([TB'], [UD]) = U'$, so muß nach dem ersten Harmoniesatz wegen der Harmonie von U, T, C, C' die Gerade $[U'V]$ durch den Punkt C gehen.

Also ist $([CU'], [TD]) = V$, $([DU'], [TC]) = U$, und $[UV]$ geht durch A, d. h. es ist C, D, A, B harmonisch.

106. Definitionen: Ein ebener Schließungssatz, welcher auf Grund des bloßen Desarguesschen Satzes bewiesen wird, heißt ein „Desarguesscher Schließungssatz". Ein Desarguesscher Schließungssatz, der bloß auf Grund des ersten Harmoniesatzes beweisbar ist, heißt ein „harmonischer" Schließungssatz, sonst ein „involutorischer". Das Aufsuchen harmonischer resp. involutorischer Punkte zu gegebenen Punkten einer Geraden soll „harmonische" resp. „involutorische" Konstruktion auf der Geraden heißen. Gelangt man von denselben gegebenen Punkten einer Geraden durch zwei verschiedene harmonische resp. involutorische Konstruktionen zu demselben Punkte, so erhält man einen „harmonischen resp. involutorischen Schließungssatz auf der Geraden". Die Gesamtheit dieser Sätze bildet die „harmonische" resp. „involutorische" Geometrie auf der Geraden. In einer Geometrie auf der Geraden, in welcher Schließungssätze nicht gelten, gibt es überhaupt keine Sätze außer den selbstverständlichen, wie z. B. daß aus $A = B$, $B = (\neq) C$ stets $A = (\neq) C$ folgt. Die getroffenen Festsetzungen sind auf die Geometrie des Geraden- und des Ebenenbüschels sinngemäß zu übertragen. Alle diese Geometrien

sollen „linear“ heißen. Zwei lineare Geometrien heißen kollinear aufeinander abgebildet, wenn jedem Elemente der einen genau ein Element der andern, und wenn harmonischen resp. involutorischen Elementen der einen harmonische resp. involutorische Elemente der andern entsprechen.

107. Satz: Sind auf einer Geraden 𝔊 mindestens zwei Punkte $A, B, \ldots$ gegeben und werden außerhalb derselben mindestens zwei Punkte $T, U, \ldots$ beliebig angenommen, so enthält das Netz der Punkte $A, B, \ldots, T, U, \ldots$ keinen nicht auf 𝔊 liegenden Punkt, welcher bei beliebiger Wahl von $T, U, \ldots$ stets derselbe bleibt.

Beweis: Angenommen, es ergäbe sich ein fester Punkt P; dann wählen wir den Punkt T beliebig, aber nicht auf 𝔊, $[AP]$, $[BP]$, ... Ist nun Q der vierte harmonische Punkt zu T, $([TP], 𝔊)$, P, so wählen wir als Punkt U einmal den Punkt Q, das andere Mal P, während wir die übrigen willkürlichen Punkte beidemal in derselben Weise wählen. Dann ergibt sich durch dieselbe Konstruktion das eine Mal der Punkt P, das andere Mal der Punkt Q, und nicht beide Male der Punkt P, wie es sein müßte.

108. Satz: Sind auf einer Geraden 𝔊 zwei oder mehr Punkte $A, B, \ldots$ gegeben und wählt man in einer Ebene von 𝔊 mehrere Punkte $T, U, \ldots$ beliebig, so ergeben sich diejenigen auf 𝔊 gelegenen Punkte des Netzes der Punkte $A, B, \ldots, T, U, \ldots$, welche auf Grund harmonischer Schließungssätze von den Punkten $T, U, \ldots$ unabhängig stets dieselben bleiben, durch bloße Konstruktion von vierten harmonischen Punkten auf der Geraden 𝔊.

Beweis: Ist P ein von $T, U, \ldots$ unabhängiger Punkt auf 𝔊, von welchem diese Tatsache durch harmonische Schließungssätze bewiesen werden kann, so muß es ein System von Punkten $C, D, E, \ldots, P$ derart geben, daß, von den gegebenen $A, B, \ldots$ und einer Anzahl willkürlicher der Punkte $C, D, \ldots$ abgesehen, sich jeder der Punkte $A, B, \ldots, C, D, \ldots, P$ aus dreien der vorhergehenden durch Harmonie ergeben muß. Ist O ein beliebiger Punkt außerhalb 𝔊, so findet (nach 104) dasselbe für die Punkte $A, B, \ldots$, $([CO], 𝔊)$, $([DO], 𝔊), \ldots, P$ statt, was zu beweisen war.

109. Satz: Der erste Involutionssatz ist kein harmonischer Schließungssatz, oder der sechste involutorische zu fünf gegebenen Punkten läßt sich nicht durch bloße harmonische Konstruktionen finden; denn es existiert eine harmonische, nichtinvolutorische lineare Geometrie.

Beweis: Sind $i_1, i_2, \ldots, i_p$ Primitiveinheiten, die den Gleichungen

$$i_\alpha^2 + 1 = i_\alpha i_\beta + i_\beta i_\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p \\ \alpha \neq \beta \end{pmatrix}$$

genügen, so sind Summen, Differenzen und Reziproke von „Vektoren“:

$$x_0 + i_1 x_1 + \cdots + i_p x_p,$$

wieder Vektoren; denn es ist $\frac{1}{x_0 + i_1 x_1 + \cdots + i_p x_p} = \frac{x_0 - i_1 x_1 - \cdots - i_p x_p}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_p^2}$. Infolgedessen wird zu drei verschiedenen Vektoren a, b, c durch die Formel der Harmonie (s. I 107 S. 33)

$$\frac{2}{d-c} = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$$

stets ein vierter harmonischer Vektor d eindeutig bestimmt. Demnach bilden diese Vektoren die Elemente einer harmonischen linearen Geometrie. Für $p > 1$ ist dieselbe nichtinvolutorisch, denn es gehört z. B. zu $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $a' = i_1$, $b' = 1 - 2i_2$ die sechste involutorische Größe:

$$c' = \frac{1 - i_1 - i_2 - i_1 i_2}{2},$$

welche aber kein Vektor mehr ist.

Anmerkung: Man kann die Elemente dieser Geometrie auch durch die Punkte eines Euklidischen Raumes von mehr als zwei Dimensionen repräsentieren, wenn man vier Punkte A, B, C, D harmonisch*) nennt, die so auf einem Kreise liegen, daß $[CD]$ durch den Pol von $[AB]$ geht.

Dagegen bilden unter derselben Festsetzung z. B. die Punkte der Ebene oder der Kugel eine lineare involutorische Geometrie.

110. Satz: In einer ebenen Desarguesschen Koordinaten-Geometrie gilt der Pascalsche Satz (60) dann und allgemein nur dann, wenn in dem zugrunde liegenden Zahlensystem das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt.

Beweis: Es sei (nach 83)

$$A = (0, 0, 1) \quad B = (0, 1, 1) \quad A_1 = (1, 0, 1) \quad B_1 = (1, 1, 1),$$

also

$$C = (0, \lambda, 1), \quad \lambda \neq 0, \neq 1,$$
$$C_1 = (1, \mu, 1), \quad \mu \neq 0, \neq 1.$$

Dann wird:

$$([AB_1], [A_1 B]) = (1, 1, 2),$$
$$([AC_1], [A_1 C]) = \left(\frac{1}{\mu}, 1, \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\right),$$
$$([BC_1], [B_1 C]) = \left(\frac{1}{\mu - 1}, \frac{1}{\mu - 1}\mu + \frac{1}{\lambda - 1}, \frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{\lambda - 1}\right).$$

*) s. Möbius, Werke Bd. II p. 200.

Ist erstens $\mu = \lambda$, so ist:

$$-\frac{1}{\mu - 1}(1, 1, 2) + \frac{\mu}{\mu - 1}(1, \mu, 2) - (1, \mu + 1, 2) = 0,$$

also liegen die drei Punkte in einer Geraden.

Ist aber $\mu \neq \lambda$, so hat man aus den drei Gleichungen

$$\alpha \frac{1}{\mu - 1} + \beta \frac{1}{\mu} = 1$$

$$\alpha \left(\frac{1}{\mu - 1} \mu + \frac{1}{\lambda - 1}\right) + \beta = 1$$

$$\alpha \left(\frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{\lambda - 1}\right) + \beta \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\right) = 2$$

α und β zu eliminieren. Aus der ersten und zweiten folgt durch Elimination von β:

$$\alpha = -(\mu - 1)(\lambda - 1).$$

Aus der ersten und dritten folgt:

$$\alpha + \beta \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 1$$

$$\alpha + \beta \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda - 1,$$

also

$$\beta \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - \lambda$$

$$\beta = (\mu - \lambda) \left\{\frac{1}{\lambda}(\mu - \lambda)\frac{1}{\mu}\right\}^{-1} = (\mu - \lambda)\, \mu\, (\mu - \lambda)^{-1} \lambda$$

$$\alpha \frac{1}{\lambda - 1} + (\mu - \lambda)\, \mu\, (\mu - \lambda)^{-1} = 1$$

$$\alpha \frac{1}{\lambda - 1} = (\mu - \lambda)(\mu - \lambda)^{-1} - (\mu - \lambda)\, \mu\, (\mu - \lambda)^{-1}$$

$$= (\mu - \lambda)(1 - \mu)(\mu - \lambda)^{-1},$$

demnach, nach Einsetzung von $\alpha = -(\mu - 1)(\lambda - 1)$:

$$(\mu - 1)(\mu - \lambda) = (\mu - \lambda)(\mu - 1)$$

$$\mu \lambda = \lambda \mu,$$

für zwei beliebige Zahlen λ und μ des Systems.

111. Satz: In einer ebenen Desarguesschen Geometrie ist der Pascalsche Satz äquivalent dem Satze von der eindeutigen Existenz eines gemeinsamen harmonischen Punktpaares zu zwei gegebenen Punktpaaren einer Geraden.

Beweis: Man transformiere zunächst nach 83 einen Punkt des ersten und einen des zweiten Paares in (0, 1, 0) und (1, 1, 0). Ist

dann $(a, b, 0)$, wo also $a \neq b$ ist, der zweite Punkt des zweiten Paares, so wende man die Transformation an:

$$\bar{x} = x$$
$$\bar{y} = x \frac{1}{b-a}(1+b) + y \frac{1}{a-b}(1+a),$$

wodurch das zweite Paar in

$$(1, 1, 0), \quad (1, -1, 0),$$

das erste in

$$(0, 1, 0), \quad (c, 1, 0), \text{ mit } c \neq 0$$

übergeht. Zu dem zweiten Paar ist jedes Paar $(x, 1, 0)$, $\left(\frac{1}{x}, 1, 0\right)$ harmonisch, denn die vier Abszissen $1, -1, x, \frac{1}{x}$ haben das Doppelverhältnis:

$$\frac{x-1}{x+1} : \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x-1}{x+1} : \frac{1-x}{1+x} = -1.$$

Damit das Paar c, 0 zu dem Paare $x, \frac{1}{x}$ harmonisch ist, muß

$$\frac{c-x}{x} : \frac{c-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -1,$$

also

$$\frac{c}{x} - 1 = -cx + 1$$
$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{c}$$

sein. Gilt der Pascalsche Satz, also (nach 110) das kommutative Gesetz der Multiplikation, so hat diese Gleichung genau zwei Wurzeln; dieselben sind reziprok. Allgemeiner, wenn x eine Wurzel der Gleichung ist, dann auch $\frac{1}{x}$. Seien nun x, y zwei verschiedene, nicht reziproke Wurzeln, so folgt aus $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$, daß

$$(xy-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = xy\frac{1}{x} - y$$

ist, also, da $xy - 1 \neq 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \neq 0$ ist und singuläre Zahlen ausgeschlossen sind, daß $xy\frac{1}{x} - y \neq 0$, d. h.

$$xy \neq yx$$

ist.

Ist dagegen für irgend zwei Wurzeln immer entweder

$$xy - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0,$$

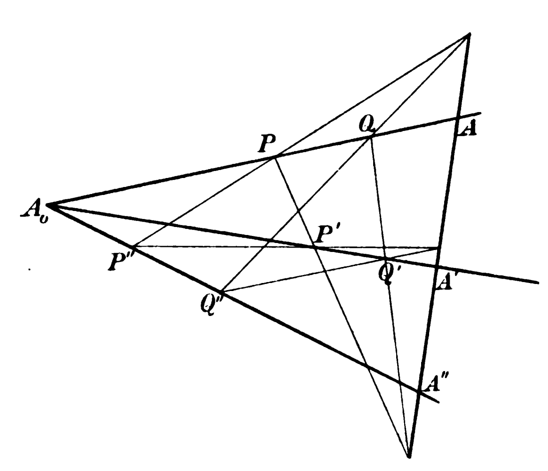
so folgt ebenso

$$xy = yx.$$

112. Satz: Der Pascalsche Satz ist unabhängig von den Grundsätzen der Verknüpfung und in der Ebene außerdem vom Desarguesschen Satze.

Beweis: Es gibt Nicht-Pascalsche Geometrien in einem Raume und in einer Desarguesschen Ebene, nämlich (110) Koordinaten-Geometrien in Zahlensystemen mit nichtkommutativer Multiplikation.

113. Definition: Unter einem Wurf*) werde im folgenden ein Quadrupel von vier Punkten (PQA_0A) einer Geraden verstanden, deren dritter in einem fest gegebenen Punkte A_0, deren vierter auf einer fest gegebenen Geraden $[A'A'']$ liegt, welche nicht durch A_0 geht.



114. Definition: Zwei Würfe (PQA_0A), $(P'Q'A_0A')$ zweier Geraden heißen gleich (=), wenn und nur wenn P und P' mit $([A'A''] [QQ'])$ in einer Geraden liegen (s. Fig.). Diese Definition ist zulässig, da der Satz besteht:

115. Satz: Sind zwei Würfe zweier Geraden einem dritten gleich, so sind sie einander gleich (s. Fig.).

Beweis: Ist

$$(P'Q'A_0A') = (PQA_0A) \text{ und } (P''Q''A_0A'') = (PQA_0A),$$

so ergibt der Desarguessche Satz für die Dreiecke $PP'P''$ und $QQ'Q''$, daß $([P'P''], [Q'Q''])$ auf der Geraden

$$[([PP'], [QQ']), ([PP''], [QQ''])] = [A'A'']$$

*) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. I (Nürnberg 1856) p. 15.

liegt; also ist

$$(P' Q' A_0 A') = (P'' Q'' A_0 A'').$$

116. Definition: Zwei Würfe einer Geraden heißen gleich, wenn sie demselben Wurf einer andern Geraden (nach 114) gleich sind.

Diese Definition ist zulässig, da nunmehr der Satz 115 allgemein besteht:

117. Satz: Sind zwei Würfe einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis: Sei erstens

$$(P Q A_0 A) = (P' Q' A_0 A') \qquad \text{(nach 114)}$$
$$(P Q A_0 A) = (P'' Q'' A_0 A'') \qquad \text{(nach 116)},$$

d. h. es existiert $(P''' Q''' A_0 A''')$, so daß

$$(P Q A_0 A) = (P''' Q''' A_0 A''') \qquad \text{(nach 114)}$$
$$(P'' Q'' A_0 A'') = (P''' Q''' A_0 A''') \qquad \text{(nach 114)};$$

dann folgt (nach 115), falls $A''' \neq A'$

$$(P' Q' A_0 A') = (P Q A_0 A), \text{ also } = (P''' Q''' A_0 A'''), \text{ also } = (P'' Q'' A_0 A'').$$

Ist aber $A''' = A'$, dann wähle man $A^{IV} \neq A'''$ und mache

$$(P''' Q''' A_0 A''') = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV});$$

dann ist

$$(P Q A_0 A) = (P''' Q''' A_0 A'''), \text{ also (nach 115) } = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV}),$$

ebenso

$$(P'' Q'' A_0 A'') = (P''' Q''' A_0 A'''), \text{ also } = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV});$$

demnach ist der vorhergehende Beweis anwendbar.

Zweitens sei

$$(P Q A_0 A) = (P' Q' A_0 A') \qquad \text{(nach 116)}$$
$$(P Q A_0 A) = (P'' Q'' A_0 A'') \qquad \text{(nach 116)},$$

d. h. es existieren

$$(P''' Q''' A_0 A'''), \quad (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV}),$$

so daß

$$(P Q A_0 A) = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV}) \qquad \text{(nach 114)}$$
$$(P' Q' A_0 A') = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV}) \qquad \text{(nach 114)}$$
$$(P Q A_0 A) = (P''' Q''' A_0 A''') \qquad \text{(nach 114)}$$
$$(P'' Q'' A_0 A'') = (P''' Q''' A_0 A''') \qquad \text{(nach 114)};$$

dabei kann man, wie oben, $A''' \neq A^{IV}$ annehmen. Dann folgt nach 115:

$$(P''' Q''' A_0 A''') = (P^{IV} Q^{IV} A_0 A^{IV}),$$

also auch

$$(P' Q' A_0 A') = (P''' Q''' A_0 A'''),$$

andererseits

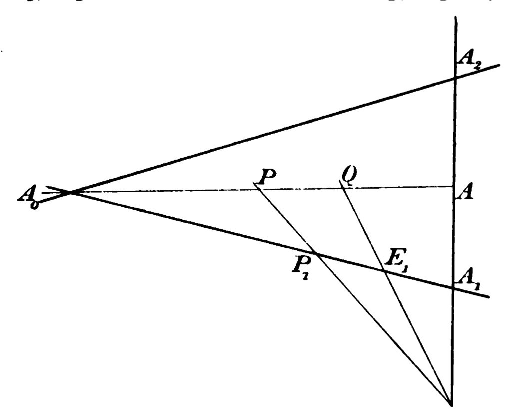
$$(P'' Q'' A_0 A'') = (P''' Q''' A_0 A'''),$$

d. h.

$$(P' Q' A_0 A') = (P'' Q'' A_0 A'')$$

im Sinne von 116.

118. Satz: Nimmt man auf $[A_0 A_1]$ und $[A_0 A_2]$ die von A_0, A_1, A_2 verschiedenen Punkte E_1, E_2 an, so existieren stets eindeutig bestimmte Punkte P_1 auf $[A_0 A_1]$, P_2 auf $[A_0 A_2]$, so daß



$$(P_1 E_1 A_0 A_1) = (P_2 E_2 A_0 A_2)$$

einem beliebig gegebenen Wurf $(P Q A_0 A)$ gleich sind.

Beweis: Es ist A wenigstens von einem der beiden Punkte A_1, A_2 verschieden. Ist z. B. $A \neq A_1$, dann ist

$$P_1 = ([A_0 A_1]\,[P, ([A_1 A_2]\,[Q E_1])),$$

und dieser Punkt ist eindeutig bestimmt (s. Fig.).

119. Definition: Das Produkt der beiden Würfe

$$(E_1 P_1 A_0 A_1) \quad \text{und} \quad (E_2 Q_2 A_0 A_2) = (P_1 R_1 A_0 A_1)$$

wird durch die Festsetzung definiert:

$$(E_1 P_1 A_0 A_1) \cdot (P_1 R_1 A_0 A_1) = (E_1 R_1 A_0 A_1)$$

(s. Fig. S. 113). Diese Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl von E_2; aber auch von der Wahl von E_1, denn ist

$$(E_1 P_1 A_0 A_1) = (S_2 E_2 A_0 A_2)$$

und setzt man also

$$(S_2 E_2 A_0 A_2) \cdot (E_2 Q_2 A_0 A_2) = (S_2 Q_2 A_0 A_2),$$

so ist dies unabhängig von E_1 und in der Tat:

$$(S_2 Q_2 A_0 A_2) = (E_1 R_1 A_0 A_1) \qquad \text{(nach 114).}$$

120. Satz: Die Multiplikation 119 der Würfe ist assoziativ.

Beweis: Es ist

$$((P Q A_0 A_1)(Q R A_0 A_1))\,(R S A_0 A_1) = (P R A_0 A_1)\,(R S A_0 A_1) = (P S A_0 A_1)$$

und ebenso:

$$(PQA_0A_1)((QRA_0A_1)(RSA_0A_1)) = (PQA_0A_1)(QSA_0A_1) = (PSA_0A_1).$$

121. Satz: Man muß

$$(PPA_0A_1) = 1 \quad \text{und} \quad (PQA_0A_1) = \frac{1}{(QPA_0A_1)}$$

setzen.

Beweis: Aus 119 folgt:

$$(PPA_0A_1)\,(PQA_0A_1) = (PQA_0A_1) = (PQA_0A_1)\,(QQA_0A_1),$$

und

$$(PQA_0A_1)\,(QPA_0A_1) = (PPA_0A_1).$$

Nach Definition 116 ist $(PPA_0A_1) = (QQA_0A_1)$, und kein anderer Wurf hat die Eigenschaft, als Faktor ein Produkt unverändert zu lassen; denn ist z. B.

$$(PQA_0A_1)(QRA_0A_1) = (PQA_0A_1),$$

so muß nach 119

$$(PRA_0A_1) = (PQA_0A_1),$$

also nach 118

$$R = Q$$

sein.

Die Reziproke zu (PQA_0A_1) ist eindeutig; denn soll

$$(PQA_0A_1)\,(QRA_0A_1) = 1 = (PPA_0A_1)$$

sein, so folgt

$$(PRA_0A_1) = (PPA_0A_1),$$

also $R = P$. Dann ist auch:

$$(QPA_0A_1)\,(PQA_0A_1) = 1.$$

122. Satz: Die Multiplikation 119 der Würfe ist kommutativ,

dann und im allgemeinen nur dann, wenn der Pascalsche Satz gilt (s. Fig.).*)

Beweis: Sei

$$(E_1 P_1 A_0 A_1) = (E_2 P_2 A_0 A_2) = (Q_2 R_2' A_0 A_2)$$
$$(E_1 Q_1 A_0 A_1) = (E_2 Q_2 A_0 A_2) = (P_2 R_2 A_0 A_2),$$

also:

$$\frac{(E_1 P_1 A_0 A_1)}{(E_1 Q_1 A_0 A_1)} = (E_2 R_2 A_0 A_2)$$

$$\frac{(E_1 Q_1 A_0 A_1)}{(E_1 P_1 A_0 A_1)} = (E_2 R_2' A_0 A_2).$$

Ist $R_2 = R_2'$, so gilt für die zwei Punkttripel E_1, P_1, Q_1 und

$E = ([P_1 P_2][Q_1 Q_2])$,
$P = ([E_1 P_2][Q_1 R_2])$,
$Q = ([E_1 Q_2][P_1 R_2])$

der Pascalsche Satz, denn es liegen die drei Punkte

$P_2 = ([E P_1][E_1 P])$,
$Q_2 = ([E Q_1][E_1 Q])$,
$R_2 = ([P_1 Q][P Q_1])$

auf der Geraden $[A_0 A_2]$.

Ist aber $R_2 \neq R_2'$, so gilt derselbe nicht, denn es wird $[A_0 A_2]$ von $[P Q_1]$ im Punkte R_2, von $[P_1 Q]$ im Punkte $R_2' \neq R_2$ geschnitten.

*) In der v. Staudtschen Wurfrechnung (l. c. II [1857] p. 166 ff.; s. auch Lüroth, Gött. Nachr. 1873 p. 767, Math. Ann. 8 [1875] p. 145; Sturm, Math. Ann. 9 [1876] p. 333; H. Pfaff, Neuere Geometrie [1867]) wird der Pascalsche

123. Definition: Die Summe zweier Würfe wird erklärt durch

$$(P_1 E_1 A_0 A_1) + (Q_2 E_2 A_0 A_2) = (S' E' A_0 A'),$$

wo

$$S' = ([A_1 P_2], [A_2 Q_1]), \quad E' = ([A_0 S'] [E_1 E_2]), \quad A' = ([A_0 S'] [A_1 A_2])$$

ist (s. Fig.).

124. Satz: Die Addition 123 der Würfe ist kommutativ (s. Fig.).

Beweis: Sei

$$(P_1 E_1 A_0 A_1) = (P_2 E_2 A_0 A_2)$$

$$(Q_2 E_2 A_0 A_2) = (Q_1 E_1 A_0 A_1)$$

$$(P_1 E_1 A_0 A_1) + (Q_2 E_2 A_0 A_2) = (S' E' A_0 A')$$

$$(Q_1 E_1 A_0 A_1) + (P_2 E_2 A_0 A_2) = (S'' E'' A_0 A''),$$

so ist zu zeigen, daß

$$(S' E' A_0 A') = (S'' E'' A_0 A'')$$

ist, d. h. daß $[S' S'']$ durch

$$E = ([E_1 E_2] [A_1 A_2]) = ([P_1 P_2] [Q_1 Q_2])$$

geht.

Es gehen $[A_1 A_2]$, $[P_1 P_2]$, $[Q_1 Q_2]$ durch einen Punkt E, also liegen nach dem Desarguesschen Satze

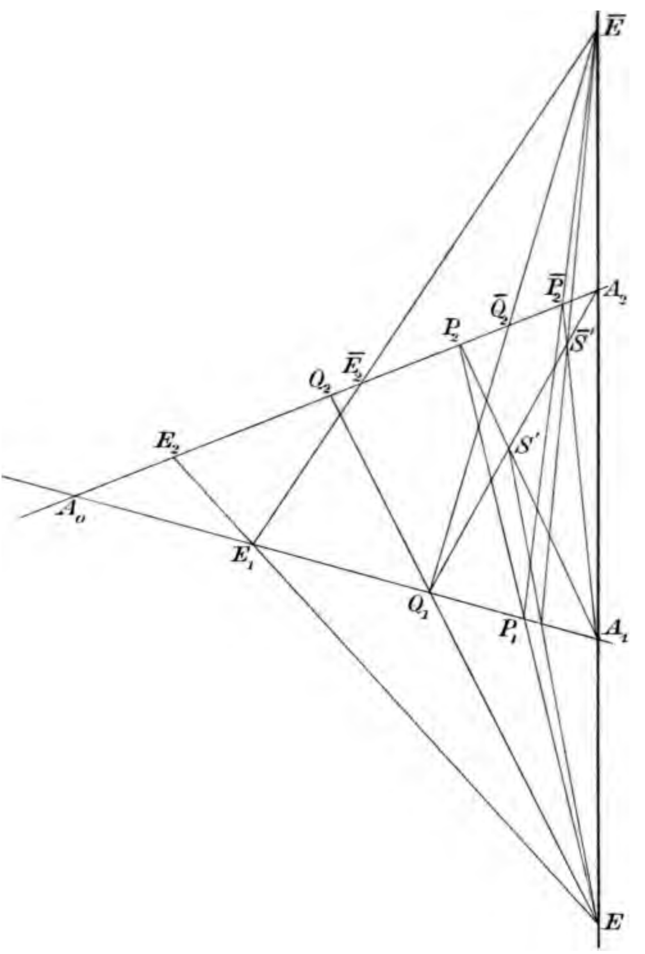
---

Satz, nämlich im projektiven Fundamentalsatz, bereits vorausgesetzt, wodurch sich die Beweise der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze wesentlich einfacher gestalten. Dagegen wird der Pascalsche Satz nicht vorausgesetzt in Hilberts Streckenrechnung (Grundlagen § 24, 25, 26), die sich aus obiger Wurfrechnung durch „affine" Spezialisierung ergibt, indem man die unendlich ferne Gerade als Gerade $[A_1 A_2]$ nimmt. Bei von Staudt und bei Hilbert fehlt der Nachweis des Gesetzes B. — Eine neue Wurfrechnung, die die obige umfaßt, ergibt sich später in der affinen Geometrie.

$$P = ([A_1 P_2] [A_2 P_1]), \quad Q = ([A_1 Q_2] [A_2 Q_1]), \quad A_0 = ([P_1 Q_1] [P_2 Q_2])$$

in einer Geraden.

Demnach gehen $[A_0 Q]$, $[P_1 S'']$, $[P_2 S']$ durch einen Punkt, also liegen



$A_1 = ([A_0 P_1] [Q S''])$, $A_2 = ([A_0 P_2] [Q S'])$, $([P_1 P_2] [S' S''])$ in einer Geraden, d. h. $[S' S'']$ geht durch $([A_1 A_2], [P_1 P_2]) = E$.

125. Satz: Die Addition 123 der Würfe ist unabhängig von der Wahl von E_1 und E_2 (s. Fig.).

Beweis: Ersetzt man z. B. E_2 durch $\bar{E}_2$ und geht dadurch P_2 in $\bar{P}_2$, S' in $\bar{S}'$ usw. über, so ist zu zeigen, daß $[S' E]$ und $[\bar{S}' \bar{E}]$ die Gerade $[A_0 A_1]$ in demselben Punkte schneiden. Dies folgt durch Anwendung des Desarguesschen Satzes auf die drei Punktpaare $P_2 \bar{P}_2$, $S' \bar{S}'$, $E \bar{E}$; denn, da dieselben auf drei Geraden eines Punktes (A_2) liegen, so liegen die drei Punkte

$$A_1 = ([P_2 S'] [\bar{P}_2 \bar{S}']), \quad P_1 = ([P_2 E], [\bar{P}_2 \bar{E}]), \quad ([S' E], [\bar{S}' \bar{E}])$$

auf einer Geraden.

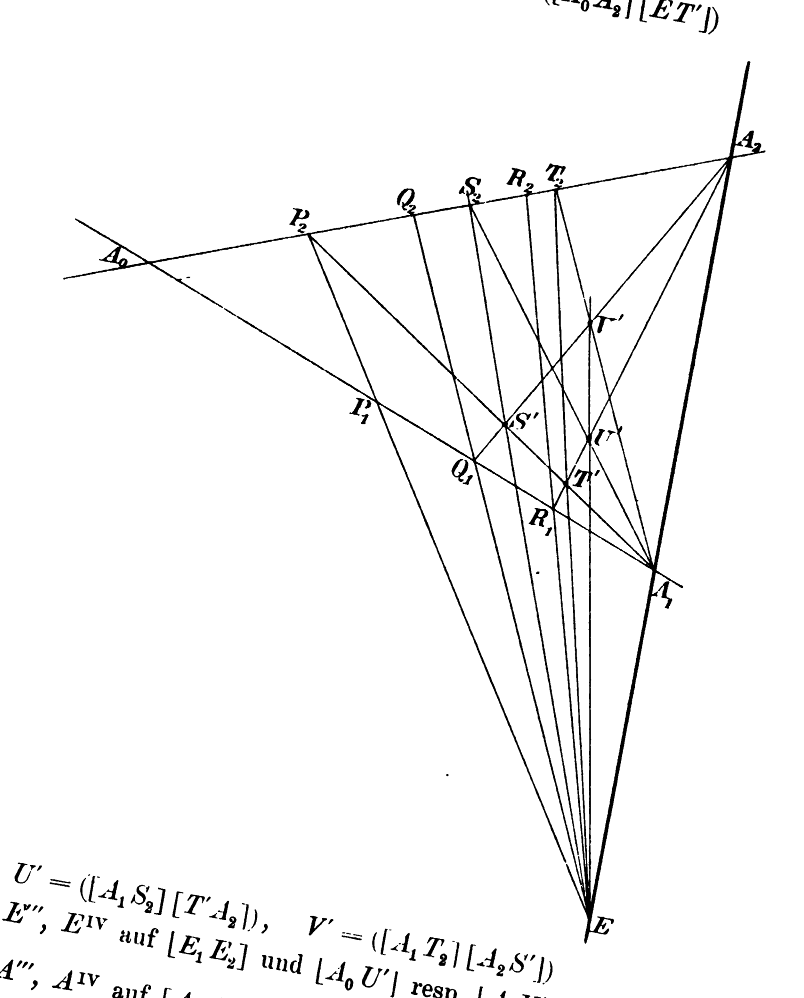
126. Satz: Die Addition 123 der Würfe ist assoziativ (s. Fig. 1.

Beweis: Es sei

$(P_1 E_1 A_0 A_1) = p, \quad (Q_1 E_1 A_0 A_1) = q, \quad (R_1 E_1 A_0 A_1) = r,$

$S' = ([A_1 P_2][A_2 Q_1]), \quad T' = ([A_1 P_2][A_2 R_1])$

$S_2 = ([A_0 A_2][ES']), \quad T_2 = ([A_0 A_2][ET'])$



$U' = ([A_1 S_2][T' A_2]), \quad V' = ([A_1 T_2][A_2 S'])$

E''', E^{IV} auf $[E_1 E_2]$ und $[A_0 U']$ resp. $[A_0 V']$

A''', A^{IV} auf $[A_1 A_2]$ und $[A_0 U']$ resp. $[A_0 V']$.

stimmt die Figur $P_2 A_1 A_2 S' T' S_2 T_2 U' V'$ mit der Figur

$A_0 A_1 A_2 P_1 Q_1 P_2 Q_2 S' S''$ des Satzes 124 überein, also geht $[U' V']$ durch E, also ist

$$(U' E''' A_0 A''') = (V' E^{\mathrm{IV}} A_0 A^{\mathrm{IV}}),$$

d. h.

$$(p + q) + r = (p + r) + q;$$

daraus folgt mit Benutzung von 124:

$$(p + q) + r = (q + p) + r = (q + r) + p = p + (q + r).$$

127. Satz: Es muß $(A_0 E_1 A_0 A_1) = 0$ gesetzt werden; es ist

$$(A_0 P_1 A_0 A_1) = (A_0 Q_1 A_0 A_1) = (Q_1 A_1 A_0 A_1)$$

$$(P_1 \neq A_0, \neq A_1, \ Q_1 \neq A_0, \neq A_1),$$

und es gibt keine andern Würfe, welche als Summanden eine Summe unverändert lassen.

Beweis: Damit

$$(P_1 E_1 A_0 A_1) + (Q_1 E_1 A_0 A_1) = (P_1 E_1 A_0 A_1)$$

ist, muß $S' = ([A_1 P_2][A_2 Q_1])$ in $[P_1 P_2]$, also in P_2 liegen; dann ist

$$Q_1 = ([A_0 A_1][A_2 S']) = A_0.$$

Es ist

$$(A_0 P_1 A_0 A_1) = (A_0 Q_2 A_0 A_2)$$

nach Definition; ebenso

$$(A_0 P_1 A_0 A_1) = (Q_2 A_2 A_0 A_2),$$

da $[A_0 Q_2]$, $[P_1 A_2]$ durch einen Punkt (A_2) von $[A_1 A_2]$ gehen.

128. Satz: Ist das Produkt zweier Würfe Null, dann ist wenigstens einer der Faktoren Null; d. h. für das System der Würfe besteht das Gesetz B (s. I 76 S. 23).

Beweis: Ist

$$(P_1 Q_1 A_0 A_1)(Q_1 R_1 A_0 A_1) = (P_1 R_1 A_0 A_1) = 0,$$

dann (127) entweder $P_1 = A_0$ oder $R_1 = A_1$, und im ersten Fall ist $(P_1 Q_1 A_0 A_1) = 0$, im zweiten $(Q_1 R_1 A_0 A_1) = 0$.

129. Satz: Für die Addition 123 und Multiplikation 119 der Würfe gilt das erste distributive Gesetz:

$$r(p + q) = rp + rq. \quad \text{(S. Fig. S. 119.)}$$

Beweis: Es sei

$$p = (P_1 E_1 A_0 A_1) = (P_2 E_2 A_0 A_2), \ q = (Q_2 E_2 A_0 A_2), \ r = (R_1 E_1 A_0 A_1)$$

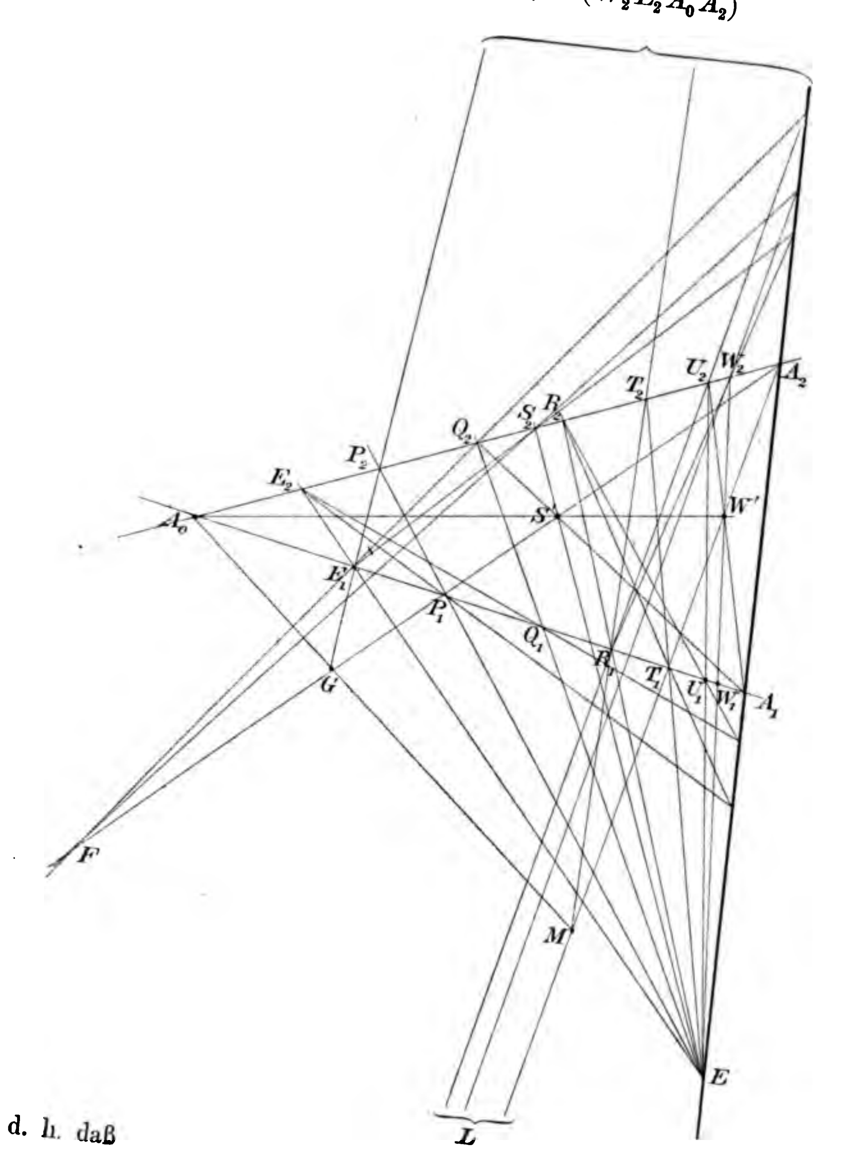
$$p + q = (S_2 E_2 A_0 A_2), \quad S' = ([A_1 Q_2][A_2 P_1]),$$

$$rp = (T_1 E_1 A_0 A_1) = (T_2 E_2 A_0 A_2), \quad rq = (U_2 E_2 A_0 A_2)$$

$$rp + rq = (W_2 E_2 A_0 A_2), \quad W' = ([A_1 U_2][A_2 T_1]),$$

o ist zu zeigen, daß

$$(R_1 E_1 A_0 A_1)(S_2 E_2 A_0 A_2) = (W_2 E_2 A_0 A_2)$$



d. h. daß

$$(R_1 E_1 A_0 A_1) = (W_2 S_2 A_0 A_2)$$

ist, oder daß

$$([R_1 W_2][E_1 S_2]) \text{ auf } [A_1 A_2]$$

liegt.

Setzt man noch

$$F = ([E_1 Q_2][A_2 P_1]), \quad G = ([E_1 P_2][A_2 P_1]), \quad L = ([R_1 U_2][A_2 T_1]),$$
$$M = ([R_1 T_2][A_2 T_1]),$$

so ergeben aus dem Desarguesschen Satze die Dreiecke $P_1 P_2 G$ und $T_1 T_2 M$, daß $A_0 G M$ in einer Geraden liegen; dann die Dreiecke $G E_1 F$ und $M R_1 L$, daß $A_0 F L$ in einer Geraden liegen; dann die Dreiecke $F Q_2 S'$ und $L U_2 W'$, daß $A_0 S' W'$ in einer Geraden liegen; dann die Dreiecke $F S' S_2$ und $L W' W_2$, daß die Punkte

$$A_2 = ([FS'][LW']), \quad E = ([S'S_2][W'W_2]), \quad ([FS_2][LW_2])$$

auf einer Geraden liegen, also $[FS_2]$, $[LW_2]$, $[A_1 A_2]$ durch einen Punkt gehen; schließlich die Dreiecke

$$E_1 F S_2 \text{ und } R_1 L W_2,$$

daß

$$([E_1 S_2][R_1 W_2]) \text{ auf } [([E_1 F][R_1 L])([FS_2][LW_2])] = [A_1 A_2]$$

liegt.

130. Satz: Für die Addition 123 und Multiplikation 119 der Würfe gilt das zweite distributive Gesetz

$$(q + r) p = qp + rp. \quad \text{(S. Fig. S. 121.)}$$

Beweis: Es sei

$$p = (P_2 E_2 A_0 A_2), \quad q = (Q_1 E_1 A_0 A_1) = (Q_2 E_2 A_0 A_2), \quad r = (R_1 E_1 A_0 A_1),$$
$$q + r = (S_1 E_1 A_0 A_1), \quad qp = (T_1 E_1 A_0 A_1) = (T_2 E_2 A_0 A_2),$$
$$rp = (U_2 E_2 A_0 A_2), \qquad qp + rp = (W_2 E_2 A_0 A_2),$$

so soll sein:

$$(S_1 E_1 A_0 A_1)(P_2 E_2 A_0 A_2) = (W_2 E_2 A_0 A_2),$$

d. h.

$$(S_1 E_1 A_0 A_1) = (W_2 P_2 A_0 A_2),$$

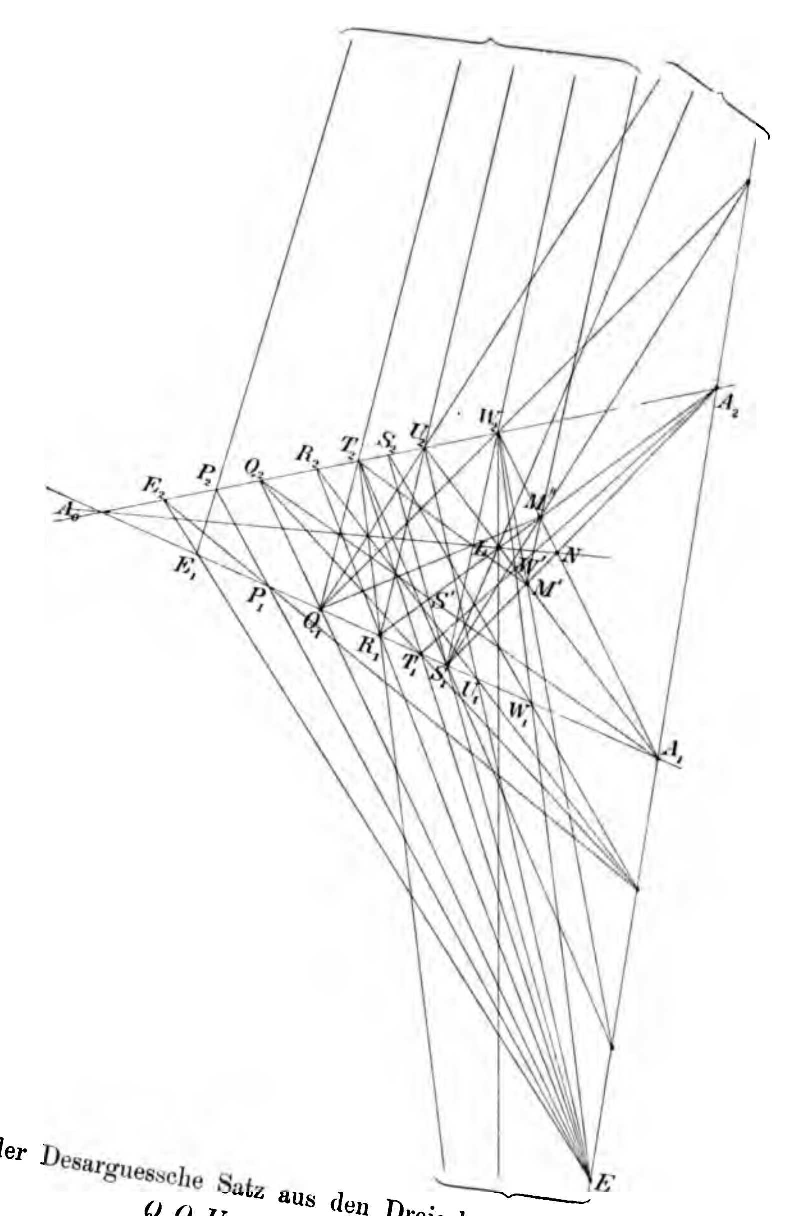
also sollen sich

$$[S_1 W_2] \text{ und } [P_2 E_1] \text{ auf } [A_1 A_2]$$

schneiden.

Es sei noch

$$S' = ([R_1 A_2][Q_2 A_1]), \quad W' = ([T_1 A_2][U_2 A_1])$$
$$L = ([R_1 A_2][U_2 A_1]), \quad N = ([S_1 A_2][W_2 A_1])$$
$$M' = ([S_1 A_2][U_2 A_1]), \quad M'' = ([R_1 A_2][W_2 A_1]),$$



ibt der Desarguessche Satz aus den Dreiecken

$Q_1 Q_2 U_2$ und $S_1 S' L$,

$_2 U_2][S' L]) = A_2$, $([Q_1 Q_2][S_1 S']) = E$, $([Q_1 U_2][S_1 L])$

auf einer Geraden, also auf $[A_1 A_2]$ liegen, dann aus den Dreiecken $Q_1 U_2 W_2$ und $S_1 L M''$, daß

$$(2) \quad ([U_2 W_2][L M'']) = A_2, \quad ([Q_1 U_2][S_1 L]) \text{ auf } [A_1 A_2] \ (1), \quad ([Q_1 W_2][S_1 M''])$$

auf einer Geraden, also auf $[A_1 A_2]$ liegen; dann aus den Dreiecken $T_2 T_1 R_1$ und $W_2 W' L$, daß

$$(3) \quad ([T_1 R_1][W' L]) = A_1, \quad ([T_2 T_1][W_2 W']) = E, \quad ([T_2 R_1][W_2 L])$$

auf einer Geraden, also auf $[A_1 A_2]$ liegen; dann aus den Dreiecken $T_2 R_1 S_1$ und $W_2 L M'$, daß

$$(4) \quad ([R_1 S_1][L M']) = A_1, \quad ([T_2 R_1][W_2 L]) \text{ auf } [A_1 A_2] \ (3), \quad ([T_2 S_1][W_2 M'])$$

auf einer Geraden, also auf $[A_1 A_2]$, liegen. Nunmehr liegen nach (2)

$$([A_0 Q_1][N M'']) = A_1, \quad ([A_0 W_2][N S_1]) = A_2 \quad ([Q_1 W_2][M'' S_1])$$

in einer Geraden, also gehen

$$(5) \qquad [A_0 N], \quad [Q_1 M''], \quad [W_2 S_1]$$

durch einen Punkt. Ferner liegen nach (4)

$$([A_0 T_2][N M']) = A_2, \quad ([A_0 S_1][N W_2]) = A_1, \quad ([T_2 S_1][M' W_2])$$

in einer Geraden, also gehen

$$(6) \qquad [A_0 N], \quad [T_2 M'], \quad [S_1 W_2]$$

durch einen Punkt. Demnach gehen nach (5) und (6)

$$[A_0 N], \quad [Q_1 M''], \quad [T_2 M']$$

durch einen Punkt, also liegen

$$([A_0 Q_1][N M'']) = A_1, \quad ([A_0 T_2][N M']) = A_2, \quad ([Q_1 T_2][M' M''])$$

auf einer Geraden, oder es gehen

$$(7) \qquad [M' M''], \quad [A_1 A_2], \quad [Q_1 T_2]$$

durch einen Punkt. Wegen

$$(Q_1 E_1 A_0 A_1) = (T_2 P_2 A_0 A_2)$$

gehen

$$(8) \qquad [Q_1 T_2], \quad [E_1 P_2], \quad [A_1 A_2]$$

durch einen Punkt, und wegen

$$(R_1 E_1 A_0 A_1) = (U_2 P_2 A_0 A_2)$$

gehen

$$(9) \qquad [R_1 U_2], \quad [E_1 P_2], \quad [A_1 A_2]$$

durch einen Punkt. Also (7, 8, 9) gehen

$$[A_1 A_2], \quad [R_1 U_2], \quad [M' M'']$$

durch einen Punkt; demnach liegen

$$(10) \qquad ([A_1 R_1)] [A_2 U_2]) = A_0, \quad ([A_1 M''] [A_2 M']) = N, \\ ([R_1 M''] [U_2 M']) = L$$

in einer Geraden, oder es gehen

$$[A_0 N], \quad [R_1 A_2], \quad [U_2 A_1]$$

durch einen Punkt L. Infolgedessen liegen

$$([A_0 R_1] [N A_2]) = S_1, \quad ([A_0 U_2] [N A_1]) = W_2, \quad ([R_1 U_2] [A_2 A_1])$$

in einer Geraden, oder es gehen

$$(11) \qquad [S_1 W_2], \quad [R_1 U_2], \quad [A_1 A_2]$$

durch einen Punkt. Aus (9) und (11) folgt schließlich, daß

$$[S_1 W_2], \quad [E_1 P_2], \quad [A_1 A_2]$$

durch einen Punkt gehen, was zu beweisen war.

131. Satz: Sind $A_0 A_1 E_1 F_1$ harmonische Punkte, so ist

$$(E_1 F_1 A_0 A_1) = -1$$

zu setzen.

Beweis: Es ist einerseits

$$(E_1 F_1 A_0 A_1) = (E_2 F_2 A_0 A_2);$$

andererseits ist

$$(E_1 F_1 A_0 A_1) = (F_2 E_2 A_0 A_2),$$

also nach 121

$$(E_1 F_1 A_0 A_1)^2 = 1$$

oder

$$((E_1 F_1 A_0 A_1) - 1)\,((E_1 F_1 A_0 A_1) + 1) = 0.$$

Da aber $E_1 \neq F_1$, also $(E_1 F_1 A_0 A_1) \neq 1$ (nach 119, 121), so muß mit Rücksicht auf 128

$$(E_1 F_1 A_0 A_1) = -1$$

sein.

Dasselbe ist geometrisch zu beweisen, denn ist (s. Fig. S. 124)

$$(F_1 E_1 A_0 A_1) + (E_2 E_2 A_0 A_2) = (S' E' A_0 A')$$

für $S' = ([A_2 F_1] [A_1 E_2])$, so gibt der Desarguessche Satz für die Dreiecke $A_1 E_2 E_1$ und $A_2 F_1 F_2$, daß

$$S' = ([A_1 E_2] [A_2 F_1]), \quad A_0 = ([A_1 E_1] [A_2 F_2]), \quad E = ([E_1 E_2] [F_1 F_2])$$

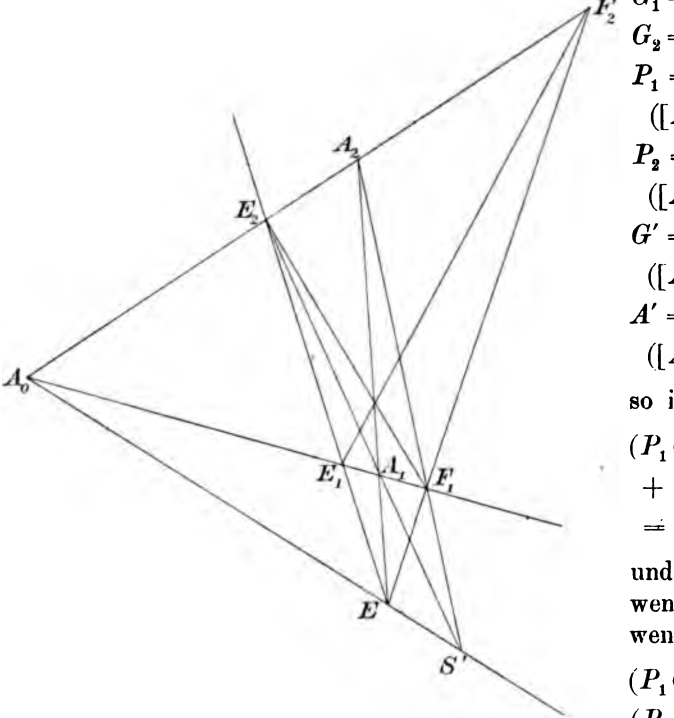
in einer Geraden liegen. Demnach ist $A' = E' = E$, also (127)

$$(S' E' A_0 A') = 0,$$

also (wegen 121)

$$(F_1 E_1 A_0 A_1) = -1.$$

132. Satz: Ist in der Ebene $\{A_0 A_1 A_2\}$ $\mathfrak{G} = [G_1 G_2]$ eine beliebige Gerade, P ein beliebiger Punkt,



$G_1 = (\mathfrak{G}, [A_0 A_1])$,
$G_2 = (\mathfrak{G}, [A_0 A_2])$,
$P_1 = ([A_2 P][A_0 A_1])$,
$P_2 = ([A_1 P][A_0 A_2])$,
$G' = ([A_0 P][G_1 G_2])$,
$A' = ([A_0 P][A_1 A_2])$,
so ist allgemein

$$(P_1 G_1 A_0 A_1) + (P_2 G_2 A_0 A_2) = (P G' A_0 A'),$$

und insbesondere, wenn und nur wenn P in $\mathfrak{G}$ liegt,

$$(P_1 G_1 A_0 A_1) + (P_2 G_2 A_0 A_2) = 1$$

Beweis: Da die Addition von der Wahl der Punkte E_1, E_2 unabhängig ist, wähle man G_1, G_2 statt E_1, E_2. Dann wird (s. Fig. S. 125)

$$(P_1 G_1 A_0 A_1) + (P_2 G_2 A_0 A_2) = (S' G' A_0 A'),$$

wo $S' = ([A_1 P_2][A_2 P_1]) = P$ wird.

Liegt P in $\mathfrak{G}$, so wird auch $G' = P$, also (nach 121) $(P G' A_0 A') = 1$ Umgekehrt, ist $(P G' A_0 A') = 1$, so folgt $G' = P$, also P auf $\mathfrak{G}$.

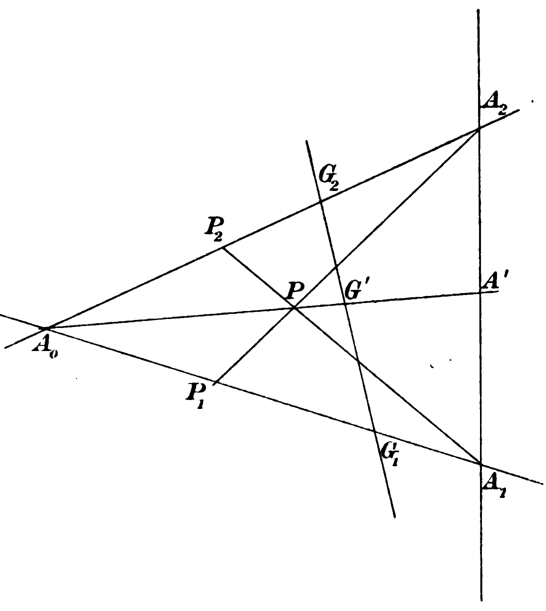
133. Satz: Sind $x_0, x_1, x_2, \xi_0, \xi_1, \xi_2$ Würfe derart, daß

$$\frac{1}{x_0} x_1 = (P_1 E_1 A_0 A_1), \quad \frac{1}{x_0} x_2 = (P_2 E_2 A_0 A_2)$$

und daß

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = (F_1 G_1 A_0 A_1), \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = (F_2 G_2 A_0 A_2),$$

so ist der Punkt $P = ([A_1 P_2][A_2 P_1])$, nicht auf $[A_1 A_2]$, durch die „homogenen Koordinaten“ x_0, x_1, x_2 und die Gerade $\mathfrak{G} = [G_1 G_2]$, nicht durch A_0, durch die homogenen Koordinaten ξ_0, ξ_1, ξ_2 eindeutig bestimmt.



Beweis: Durch $\frac{1}{x_0} x_1 = (P_1 E_1 A_0 A_1)$ ist der Punkt P_1 (118), durch $\frac{1}{x_0} x_2 = (P_2 E_2 A_0 A_2)$ der Punkt P_2 eindeutig, durch P_1 und P_2 der Punkt $P = ([A_1 P_2][A_2 P_1])$ eindeutig bestimmt. Nimmt man x_0', x_1', x_2' statt x_0, x_1, x_2, so daß $\frac{1}{x_0'} x_1', \frac{1}{x_0'} x_2'$ bezw. denselben Würfen gleich sind, so wird

$$x_0' = \lambda x_0, \quad x_1' = \lambda x_1, \quad x_2' = \lambda x_2,$$

wenn $\lambda = \frac{x_0'}{x_0}$ gesetzt wird. Demnach bestimmen $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ für alle $\lambda \neq 0$ denselben Punkt; die eingeführten Größen sind also homogene Koordinaten.

Durch

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = (F_1 G_1 A_0 A_1), \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = (F_2 G_2 A_0 A_2)$$

werden bei gegebenem F_1 und F_2 die Punkte G_1, G_2 (nach 118) eindeutig bestimmt, demnach auch die Gerade $\mathfrak{G} = [G_1 G_2]$. Nimmt man ξ_0', ξ_1', ξ_2' statt ξ_0, ξ_1, ξ_2, so daß $\frac{\xi_1'}{\xi_0'}, \frac{\xi_2'}{\xi_0'}$ bzw. denselben Punktquadrupeln gleich sind, so wird

$$\xi_0' = \xi_0 l, \quad \xi_1' = \xi_1 l, \quad \xi_2' = \xi_2 l,$$

wenn $l = \frac{1}{\xi_0} \xi_0'$ gesetzt wird. Demnach bestimmen $(\xi_0 l, \xi_1 l, \xi_2 l)$ für alle $l \neq 0$ dieselbe Gerade; die eingeführten Größen sind also homogene Koordinaten.

134. Satz: Sind $(E_1 F_1 A_0 A_1)$ und $(E_2 F_2 A_0 A_2)$ harmonische Punkte, so ist

$$x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $P = (x_0, x_1, x_2)$ auf der Geraden $\mathfrak{G} = [\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ liegt.

Beweis: Die in 132 abgeleitete Bedingung nimmt mit Rücksicht auf 119 und 120 die Form an:

$$(P_1 E_1 A_0 A_1)(E_1 F_1 A_0 A_1)(F_1 G_1 A_0 A_1)$$
$$+ (P_2 E_2 A_0 A_1)(E_2 F_2 A_0 A_2)(F_2 G_2 A_0 A_2) = 1,$$

also (wegen 131, 133):

$$\frac{1}{x_0} x_1 \frac{\xi_1}{\xi_0} + \frac{1}{x_0} x_2 \frac{\xi_1}{\xi_0} + 1 = 0$$

oder

$$x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0.$$

135. Es ist

$$\frac{1}{x_1} x_0 = (E_1 P_1 A_0 A_1), \quad \frac{1}{x_2} x_0 = (E_2 P_2 A_0 A_1),$$

also

$$\frac{1}{x_2} x_1 = (E_2 P_2 A_0 A_2)(P_1 E_1 A_0 A_1) = (E_2 Q_2 A_0 A_2)$$
$$\frac{1}{x_1} x_2 = (E_1 Q_1 A_0 A_1),$$

wenn $[Q_1 E_2]$, $[Q_2 E_1]$, $[P_1 P_2]$ durch einen Punkt P' auf $[A_1 A_2]$ gehen. Für P auf $[A_0 A_1]$ oder auf $[A_0 A_2]$ gilt nur derjenige der beiden Werte $\frac{1}{x_2} x_1$ oder $\frac{1}{x_1} x_2$, welcher 0 ist. Für $P = A_0$ setze man $x_1 = x_2 = 0$. Liegt P auf $[A_1 A_2]$, so setze man $x_0 = 0$, $(P' P A_1 A_2) = -1$,

$$\frac{1}{x_2} x_1 = (E_2 Q_2 A_0 A_2), \quad \frac{1}{x_1} x_2 = (E_1 Q_1 A_0 A_1),$$

wo $([E_2 Q_1], [E_1 Q_2]) = P'$ ist.

Es ist

$$\frac{\xi_0}{\xi_1} = (G_1 F_1 A_0 A_1), \quad \frac{\xi_0}{\xi_2} = (G_2 F_2 A_0 A_2),$$
$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (F_2 G_2 A_0 A_2)(G_1 F_1 A_0 A_1) = (F_2 H_2 A_0 A_2),$$
$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = (F_1 H_1 A_0 A_1),$$

wenn $[F_1 H_2]$, $[F_2 H_1]$ durch $G' = (\mathfrak{G}, [A_1 A_2])$ gehen. Geht $\mathfrak{G}$ durch A_1 oder durch A_2, so gilt nur derjenige der beiden Werte $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ oder $\frac{\xi_2}{\xi_1}$,

welcher 0 ist. Ist $\mathfrak{G} = [A_1 A_2]$, so setze man $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Geht $\mathfrak{G}$ durch A_0, so setze man $\xi_0 = 0$,

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = (F_1 H_1 A_0 A_2), \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = (F_2 H_2 A_0 A_2).$$

Damit sind für **alle** Punkte und Geraden die Quotienten der homogenen Koordinaten festgesetzt, und es ist zu zeigen, daß nunmehr die Relation $x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0$ allgemein für jeden Punkt (x_0, x_1, x_2) und jede durch ihn gehende Gerade $[\xi_0, \xi_1, \xi_2]$ gilt.

Es sei erstens $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gerade, aber

$$P = G' = ([G_1 G_2] [A_1 A_2]),$$

also $x_0 = 0$. Dann sei $P_0 = ([A_0 P] [E_1 Q_2])$. Es sind $P P' A_1 A_2$ harmonische Punkte, also (s. 103) auch $P_0 P' E_1 Q_2$, also auch A_0, A_1, E_1, $([A_0 A_1] [Q_2 P])$; andererseits sind A_0, A_1, E_1, F_1 harmonisch, demnach ist (90) $F_1 = ([A_0 A_1] [Q_2 P])$, also

$$Q_2 = H_2 = ([A_0 A_2] [F_1 G']).$$

Nun ist

$$\frac{1}{x_1} x_2 = (E_1 Q_1 A_0 A_1) = (Q_2 E_2 A_0 A_2)$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (F_2 H_2 A_0 A_2) = (H_1 F_1 A_0 A_1),$$

also

$$-\frac{1}{x_1} x_2 \frac{\xi_2}{\xi_1} = (Q_2 E_2 A_0 A_2)(E_2 F_2 A_0 A_2)(F_2 H_2 A_0 A_2) = (Q_2 H_2 A_0 A_2)$$

gleich 1, also $x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0$. Sollte aber (z. B.) $\frac{1}{x_1} x_2 = 0$ sein, also $(Q_2 E_2 A_0 A_2) = 0$, $Q_2 = A_0$, $P' = A_1$, $P = A_1$, so geht $\mathfrak{G}$ durch A_1, also wird auch

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = (F_1 H_1 A_0 A_1) = 0, \quad \text{denn} \quad H_1 = ([F_2 G'] [A_0 A_1]) = A_1;$$

demnach ist in diesem Fall:

$$\frac{1}{x_1} x_2 + \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0,$$

oder auch:

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0.$$

Es sei zweitens P ein beliebiger Punkt, aber $\mathfrak{G}$ eine Gerade durch A_0.

Sei

$$G = ([P_1 P_2] [A_1 A_2]), \quad Q_2 = ([A_0 A_2] [G E_1]), \quad P_0 = ([G Q_2] [A_0 P]),$$

so sind G, G', A_1, A_2 harmonisch, also auch

$$G, P_0, E_1, Q_2,$$

also auch

$$A_1,\ A_0,\ E_1,\ ([G'Q_2][A_0A_1]).$$

Andererseits sind

$$A_1,\ A_0,\ E_1,\ F_1$$

harmonisch, demnach ist

$$F_1 = ([G'Q_2][A_0A_1]),\quad \text{d. h.}\quad Q_2 = ([A_0A_2][F_1G']) = H_2.$$

Nun ist

$$\frac{1}{x_2}x_1 = (E_2Q_2A_0A_2),\quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = (H_2F_2A_0A_2),$$

also

$$\frac{1}{x_2}x_1\frac{\xi_1}{\xi_2} = (E_2F_2A_0A_2) = -1,$$

oder

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 = 0.$$

Sollte aber z. B.

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = (H_2F_2A_0A_2) = 0,$$

also

$$H_2 = A_0$$

sein, so ist

$$G' = A_1,\quad G = A_1,\quad \mathfrak{G} = [A_0A_1],$$

also

$$\frac{1}{x_1}x_2 = (E_1Q_1A_0A_1) = 0,$$

denn es wird

$$Q_1 = ([A_0A_1][GE_2]) = A_1.$$

136. Satz: Für eine ebene Geometrie ist das Bestehen des Desarguesschen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung für die Einführbarkeit von Koordinaten.

Beweis folgt einerseits aus 84, andererseits aus den Entwicklungen von 113 bis 135.

137. Satz: Für eine ebene Geometrie ist das Bestehen des Desarguesschen Satzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie Schnitt einer räumlichen Geometrie ist.*)

Beweis ergibt sich einerseits aus 58, andererseits kann man nach 113 bis 135 in die ebene Desarguessche Geometrie Koordinaten einführen und alsdann die aus demselben System zu bildende räumliche Geometrie der Punkte (x_0, x_1, x_2, x_3) betrachten; von dieser ist die ebene Geometrie der sich für $x_3 = 0$ ergebende Schnitt. Mehr geometrisch beweist man dasselbe, indem man als „Raumgerade" jedes Geradenpaar $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$ der betrachteten Ebene, als „Raumpunkt" jedes

*) In affiner Spezialisierung d. h. unter Hinzunahme des Parallelen-Axioms bewiesen bei Hilbert, Grundlagen der Geometrie § 30.

mit einem festgegebenen Punkte S der Ebene in einer Geraden liegende Punktpaar $(P'P'')$ der Ebene, als Koinzidenz von $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$ mit $(P'P'')$ die gleichzeitige Koinzidenz von P' mit $\mathfrak{G}'$ und von P'' mit $\mathfrak{G}''$ definiert. Damit ist zugleich (nach 9) die Ebene definiert, die man durch einen Punkt $(P'P'')$ und eine Gerade $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$ oder am einfachsten durch $(P'P'')$ und die Gerade

$$\mathfrak{G} = [(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'')([P'(\mathfrak{H}\mathfrak{G}')][P''(\mathfrak{H}\mathfrak{G}'')])]$$

der Ebene repräsentiert, welche für jede Gerade $\mathfrak{H}$ von S nach dem Desarguesschen Satze dieselbe ist. Dann bestimmen ohne weiteres zwei verschiedene Punkte $(P'P'')$, $(Q'Q'')$ eine Gerade $([P'Q'][P''Q''])$, wenn man noch festsetzt, daß stets $(PP) = P$, $(SP) = S$ sein soll. Ferner bestimmen drei Punkte $(P'P'')$, $(Q'Q'')$, $(R'R'')$, die nicht in einer Geraden liegen, eine Ebene, repräsentiert durch den Punkt $(P'P'')$ und die Gerade $([P'Q'][P''Q''])$. Zwei Gerade $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$, $[\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'']$ eines Punktes $(P'P'')$ bestimmen eine Ebene, repräsentiert durch den Punkt $(P'P'')$ und die Gerade $[(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'')(\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'')]$; ebenso bestimmen zwei Gerade $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$, $[\mathfrak{H}'\mathfrak{H}'']$ einer Ebene einen Schnittpunkt $[(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')(\mathfrak{G}''\mathfrak{H}'')]$. Schließlich bestimmen eine Ebene $\{\mathfrak{G}(P'P'')\}$ und eine Gerade $[\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'']$ den Schnittpunkt $(\mathfrak{G}[(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'')([P'(\mathfrak{H}\mathfrak{G}')][P''(\mathfrak{H}\mathfrak{G}'')])])$, wenn $\mathfrak{H}$ eine beliebige Gerade von S, aber $\neq [P'P'']$, $\neq [S(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}'')]$ ist. Demnach bestehen in der Raumgeometrie der Punkte $(P'P'')$ alle räumlichen Verknüpfungsgrundsätze und die ebene Geometrie der Punkte $(PP) = P$ ist ein Schnitt derselben.*)

138. Satz: Es gibt keinen vom Desarguesschen und Pascalschen Satze unabhängigen Schließungssatz; jeder Schließungssatz ist auf Grund des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes beweisbar.

Beweis: Da der Desarguessche Satz gelten soll, kann man nach 133 bis 135 Koordinaten einführen, für welche, da der Pascalsche Satz gelten soll, das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt (122); irgend ein vorgelegter Schließungssatz kann jetzt durch bloße Rechnung bewiesen werden. Wird bei der Rechnung das kommutative Gesetz

*) Repräsentiert man, minder einfach, die Raumpunkte statt durch Punktpaare $(P'P'')$ durch Dreiecke $(PP'P'')$, deren Seiten durch drei fest gegebene Punkte S, S', S'' einer Geraden gehen, so erhält man die projektive Verallgemeinerung der von Schur (Math. Ann. 58, 1904, p. 427) zum Beweise des affin spezialisierten Satzes 137 konstruierten Geometrie, und man erhält diese Geometrie selbst, wenn man die Punkte S, S', S'' auf der unendlich fernen Geraden wählt. Denselben Dienst leistet übrigens jede Art darstellende Geometrie, z. B. auch die von Steiner (s. W. Fiedler, Cyklographie, Leipzig 1882, p. IV) vorgeschlagene Abbildung der Raumpunkte auf die Kreise der Ebene; diese ist ebenfalls in der obigen als Spezialfall enthalten, wenn man jeden Kreis durch einen Radius gegebener Richtung repräsentiert.

der Multiplikation nicht benutzt, so ist der Satz vom Desarguesschen Satze allein abhängig. Für räumliche Schließungssätze gilt nach 148 dasselbe; man kann aber auch jeden räumlichen Schließungssatz folgendermaßen auf einen ebenen zurückführen. Man nehme die drei Elemente E, O, O', so daß sie weder unter sich noch mit irgend welchen Elementen der räumlichen Figur koinzidieren. Jeder Punkt P der Figur wird durch das Punktpaar $P' = ([O'P]\,\mathsf{E})$, $P'' = ([O''P]\,\mathsf{E})$ der Ebene E, jede Gerade $\mathfrak{G}$ durch das Geradenpaar $\mathfrak{G}' = [\{O'\mathfrak{G}\}\,\mathsf{E}]$, $\mathfrak{G}'' = [\{O''\mathfrak{G}\}\,\mathsf{E}]$ der Ebene E repräsentiert, jede Ebene durch irgend drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen. Jede Koinzidenz im Raume besteht entweder darin, daß vier Punkte P, Q, R, S (oder zwei Gerade $\mathfrak{G} = [PQ]$, $\mathfrak{H} = [RS]$) in einer Ebene liegen, oder sie ist aus solchen Koinzidenzen zusammengesetzt. Sie kommt also auf ebene Koinzidenzen in E von der Art zurück, daß die drei Punkte $(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')$, $(\mathfrak{G}''\mathfrak{H}'')$, $([O'O'']\,\mathsf{E})$ in einer Geraden liegen.

139. Durch die Hinzunahme des Pascalschen Satzes wird die in 113 bis 130 begründete Rechnung mit Würfen dahin vervollständigt, daß nunmehr beliebige Würfe in bezug auf Gleichheit und Verschiedenheit verglichen werden können. Dazu dienen die folgenden Definitionen und Sätze:

140. Definition: Unter einem Wurf werden vier beliebige Punkte einer Geraden verstanden. Zwei Würfe $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ heißen perspektivisch erster Ordnung, wenn $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ durch denselben Punkt (S_1) (das Perspektivitätszentrum) gehen, in Zeichen: $(ABCD) \underset{S_1}{\overline{\wedge}} (A_1B_1C_1D_1)$. Sind zwei Würfe einem dritten perspektivisch erster Ordnung, so sind sie unter sich perspektivisch zweiter Ordnung usw. Zwei Würfe können zugleich von zwei verschiedenen Ordnungen perspektivisch sein. Zwei Würfe heißen gleich, wenn sie von beliebiger Ordnung perspektivisch sind. Diese Definition ist zulässig, wenn der „Fundamentalsatz der projektiven Geometrie“ besteht:

141. Satz: Sind zwei Würfe $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gleich, so wird durch jede Folge von Perspektivitäten, welche ABC resp. in $A'B'C'$ überführt, auch D in D' übergeführt.

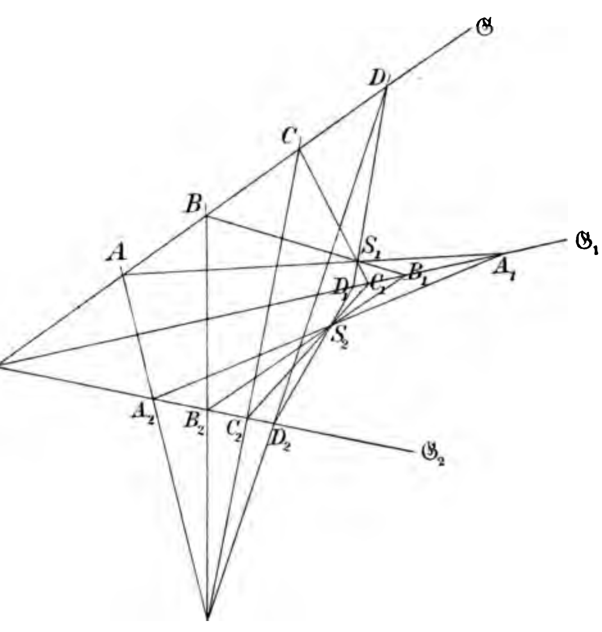
Beweis: Dieser Satz ist wie jeder Schließungssatz nach 138 auf Grund des Desarguesschen und des Pascalschen Satzes rechnerisch beweisbar. Einen rein-geometrischen Beweis desselben Satzes gab Schur*) auf Grund der folgenden Hilfssätze:

*) Math. Ann. 51 (1899). — Der hier für den entscheidenden Satz 143 gegebene Beweis ist wesentlich anders und erheblich einfacher als der entsprechende bei Schur.

142. Satz: Schneiden sich die drei Geraden

$$\mathfrak{G} = [ABCD], \quad \mathfrak{G}_1 = [A_1 B_1 C_1 D_1], \quad \mathfrak{G}_2 = [A_2 B_2 C_2 D_2]$$

in einem Punkte, und sind $(ABCD)$, $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ perspektivisch erster Ordnung, ebenso $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ und $(A_2 B_2 C_2 D_2)$, dann auch $(ABCD)$ und $(A_2 B_2 C_2 D_2)$ (s. Fig.).



Beweis: Der Desarguessche Satz angewandt auf je zwei der Dreiecke

$$AA_1A_2,\ BB_1B_2,\ CC_1C_2,\ DD_1D_2$$

ergibt, daß sich je zwei der Geraden

$$[AA_1],\ [BB_1],\ [CC_1],\ [DD_1],$$

also alle vier auf der Geraden $[S_1 S_2]$ der beiden Perspektivitätszentren S_1 und S_2 schneiden.

143. Satz: Ist in einer Ebene auf drei Geraden $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$

$$(A_0 B_0 C_0 D_0) \underset{S_1}{\barwedge} (A_1 B_1 C_1 D_1) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2 B_2 C_2 D_2), \qquad (S_1 \neq S_2)$$

so gibt es auf Geraden jedes Punktes P der Ebene Würfe $ABCD$, so daß

$$(A_0 B_0 C_0 D_0) \underset{S_1'}{\barwedge} (ABCD) \underset{S_2'}{\barwedge} (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

ist, für zwei geeignete Perspektivitätszentren S_1', S_2' (s. Fig. p. 132).

Beweis: Man lege eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch P und den Schnittpunkt der beiden Geraden $\mathfrak{G}_0 = [A_0 B_0 C_0 D_0]$ und $\mathfrak{G}_1 = [A_1 B_1 C_1 D_1]$, und mache auf ihr $(ABCD) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2 B_2 C_2 D_2)$; dann ist einerseits

$$(ABCD) \underset{S_2}{\barwedge} (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

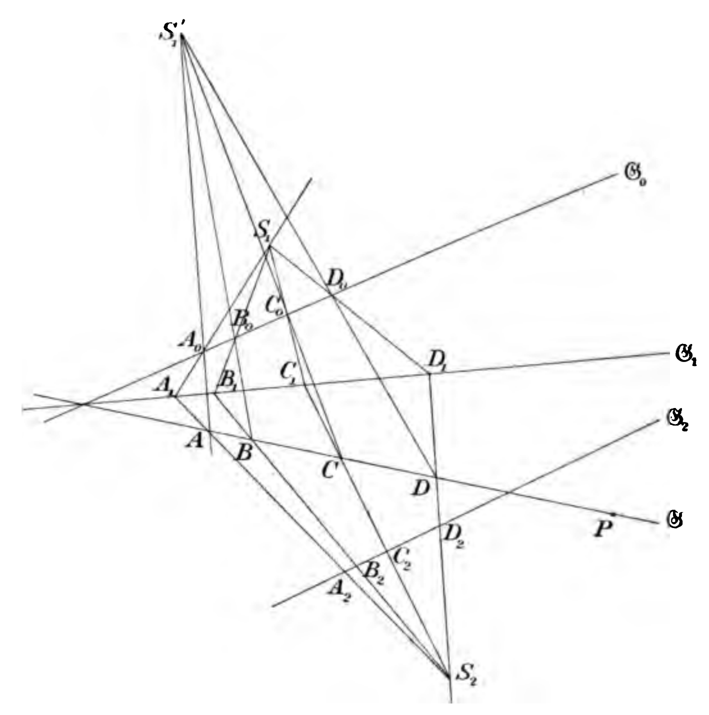
andererseits

$$(A_0 B_0 C_0 D_0) \underset{S_1}{\barwedge} (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

also (142)

$$(A_0B_0C_0D_0) \underset{S_1'}{\barwedge} (ABCD) \text{ und } (ABCD) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2B_2C_2D_2).$$

$\mathfrak{G}$ darf nicht durch S_2 gelegt werden. Sollte aber S_2 auf $[P(\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_1)]$ liegen, so ziehe man $\mathfrak{G}$ durch P und $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)$, aber nicht durch S_1.



Sollte S_1 auf $[P(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)]$ liegen, so ziehe man erst $\mathfrak{G}'$ durch $(\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_1)$, nicht durch S_2, dann $\mathfrak{G}$ durch P und $(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_2)$; oder erst $\mathfrak{G}'$ durch $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)$, nicht durch S_1, dann $\mathfrak{G}$ durch P und $(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_0)$. Eine dieser beiden Konstruktionen ist auch dann anwendbar, wenn P in S_1 oder in S_2 liegt.

144. Satz: Jede Perspektivität ist von erster oder zweiter Ordnung.

Beweis: Eine Perspektivität dritter Ordnung

$$(A_0B_0C_0D_0) \underset{S_1}{\barwedge} (A_1B_1C_1D_1) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2B_2C_2D_2) \underset{S_3}{\barwedge} (A_3B_3C_3D_3)$$

kann auf eine der ersten oder zweiten zurückgeführt werden, wie folgt. Es geht entweder $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{G}_2$ nicht durch $(\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_3)$; sonst reduziert sich die Perspektivität zwischen $(A_0B_0C_0D_0)$ und $(A_3B_3C_3D_3)$, nach 142, auf eine von der ersten Ordnung. Geht nun z. B. $\mathfrak{G}_2$ nicht durch $(\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_3)$, so ersetze man (nach 143) $\mathfrak{G}_1$ durch eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch

$(\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3) \neq (\mathfrak{G}_0\mathfrak{G}_2)$. Alsdann wird nach 142 $(ABCD) \barwedge (A_3B_3C_3D_3)$ von erster Ordnung, also $(ABCD)$ und $(A_3B_3C_3D_3)$ perspektivisch von zweiter Ordnung. In derselben Weise reduziert sich eine Perspektivität n^{ter} Ordnung auf eine solche $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

145. Satz: Ist

$$(A_0B_0C_0D) = (A_2B_2C_2D),$$

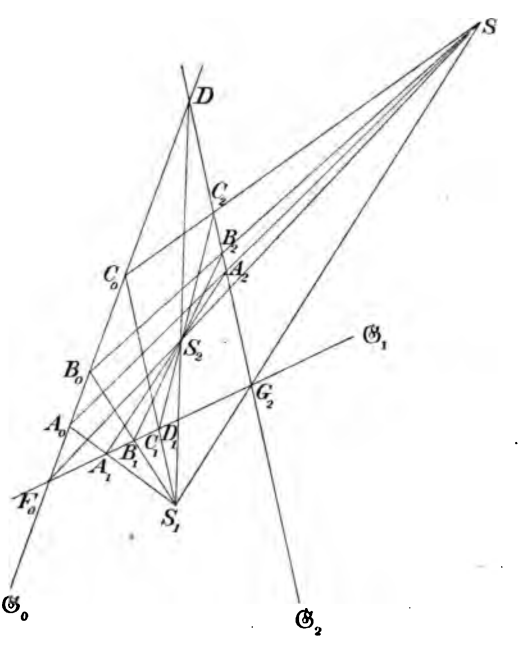
so ist

$$(A_0B_0C_0D) \barwedge (A_2B_2C_2D).$$

Beweis: Man kann nach 144 annehmen, daß

$$(A_0B_0C_0D) \underset{S_1}{\barwedge} (A_1B_1C_1D_1) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2B_2C_2D)$$

ist. Ist nun erstens $D_1 = D$, so folgt die Behauptung aus 142. Ist zweitens $D_1 \neq D$, so liegt auf $[DD_1]$ sowohl S_1 als S_2, d. h. D, S_1, S_2 liegen in einer Geraden. Dann folgt die Behauptung aus dem Pascalschen Satze. Setzt man nämlich (s. Fig.) $F_0 = (\mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1)$, $G_2 = (\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)$,



so ergeben die beiden Punkttripel DS_1S_2 und $F_0A_1G_2$, daß die drei Punkte

$$A_0 = ([A_1S_1][DF_0]), \quad A_2 = ([S_2A_1][DG_2]), \quad ([F_0S_2][S_1G_2]) = S$$

auf einer Geraden liegen, daß also $[A_0A_2]$ und ebenso $[B_0B_2]$, $[C_0C_2]$ durch einen und denselben Punkt S gehen.

146. Nunmehr können wir den Fundamentalsatz 141 beweisen. Es sei gegeben $A_0B_0C_0D_0$ auf $\mathfrak{G}_0$, $A_2B_2C_2$ auf $\mathfrak{G}_2$, und sei (s. Fig. p. 134)

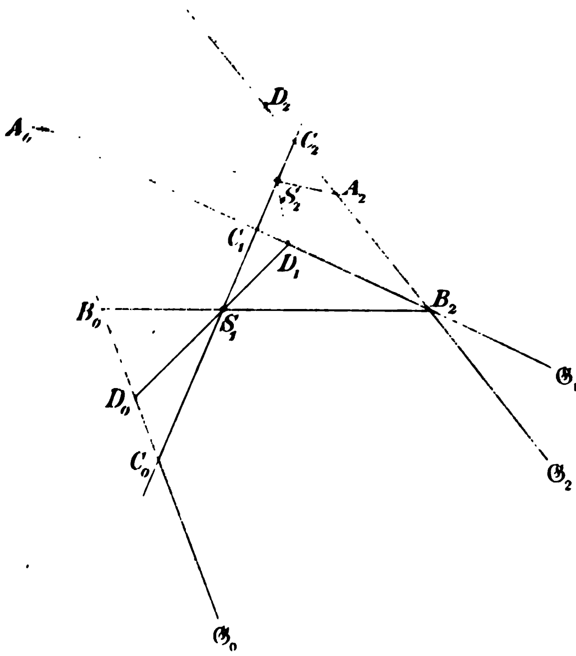
$$\mathfrak{G}_1 = [A_0B_2], \quad S_1 = ([C_0C_2][B_0B_2]), \quad S_2 = ([C_0C_2][A_0A_2]),$$
$$C_1 = (\mathfrak{G}_1, [C_0C_2]), \quad D_1 = (\mathfrak{G}_1, [D_0S_1]), \quad D_2 = (\mathfrak{G}_2, [D_1S_2]),$$

so ist

$$(A_0B_0C_0D_0) \underset{S_1}{\barwedge} (A_0B_2C_1D_1) \underset{S_2}{\barwedge} (A_2B_2C_2D_2).$$

Ist vermittelst zweier anderer Perspektivitäten auch

$$(A_0B_0C_0D_0) = (A_2B_2C_2D_2'),$$



so ist

$$(A_0 B_0 C_0 D_0) = (A_2 B_2 C_2 D_2') \underset{S_2}{\overline{\wedge}} (A_0 B_2 C_1 D_1'),$$

also (145)

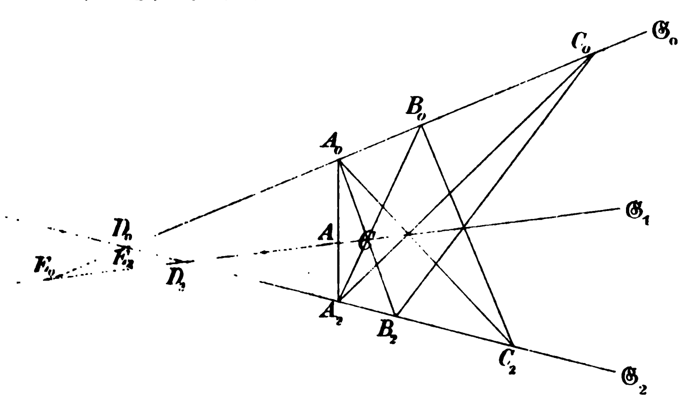
$$(A_0 B_0 C_0 D_0) \overline{\wedge} (A_0 B_2 C_1 D_1'),$$

d. h. $[D_0 D_1']$ geht durch $([B_0 B_2][C_0 C_1]) = S_1$, also ist

$$D_1' = (\mathfrak{G}_1, [S_1 D_0]) = D_1,$$
$$D_2' = (\mathfrak{G}_2, [D_1' S_2]) = D_2.$$

147. Wie wir auf Grund des Pascalschen Satzes den Fundamentalsatz bewiesen haben, so kann man bekanntlich umgekehrt den Pascalschen Satz beweisen, wenn der Fundamentalsatz vorausgesetzt wird.

Es seien (s. Fig.) $A_0 B_0 C_0$ auf $\mathfrak{G}_0$, $A_2 B_2 C_2$ auf $\mathfrak{G}_2$ gegeben. $(\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_2) =$



$D_0 = E_2$; man bestimme durch zwei Perspektivitäten, welche $A_0 B_0 C_0$ in $A_1 B_1 C_1$ überführen, die Punkte D_2, E_0, so daß

$$(A_0 B_0 C_0 D_0) = (A_2 B_2 C_2 D_2),$$
$$(A_0 B_0 C_0 E_0) = (A_2 B_2 C_2 E_2) \text{ ist.}$$

Dann ist zugleich, vermittelst derselben Perspektivitäten, auch

$$(A_0 B_0 D_0 E_0) = (A_2 B_2 D_2 E_2),$$
$$(B_0 C_0 D_0 E_0) = (B_2 C_2 D_2 E_2),$$
$$(A_0 C_0 D_0 E_0) = (A_2 C_2 D_2 E_2).$$

Nunmehr sei

$$(A_0 B_0 D_0 E_0) \underset{A_2}{\overline{\wedge}} (A C D_2 E_0) \text{ und}$$
$$(A_2 B_2 D_2 E_2) \underset{A_0}{\overline{\wedge}} (A C' D_2 E_0),$$

so folgt aus

$$(A C D_2 E_0) = (A C' D_2 E_0)$$

nach dem Fundamentalsatze

$$C = C',$$

d. h. $([A_0 B_2][A_2 B_0])$ liegt auf $[E_0 D_2]$; dasselbe folgt für $([A_0 C_2][A_2 C_0])$ und $([B_0 C_2][B_2 C_0])$.

148. Satz: Es ist $ABCD = BADC$.

Beweis: Es sei

$$ABCD \underset{M}{\overline{\wedge}} EFGD \underset{A}{\overline{\wedge}} MNGC,$$

so ist

$$MNGC \underset{F}{\overline{\wedge}} BADC,$$

also (140)

$$ABCD = BADC.$$

149. Definition: Unter dem Wurf ΑΒΓΔ von vier Ebenen einer Geraden 𝔊 wird der Wurf der vier Punkte (Α𝔋), (Β𝔋), (Γ𝔋), (Δ𝔋) für irgend eine nicht durch 𝔊 gehende Gerade 𝔋 verstanden, der nach 140 für jede solche Gerade 𝔋 der gleiche ist. Denn sind 𝔋 und 𝔋′ zwei solche Gerade, 𝔋″ durch 𝔋 und 𝔋′ eine dritte solche Gerade, so sind die auf 𝔋 und 𝔋″ liegenden Würfe der Schnittpunkte mit den Ebenen Α, Β, Γ, Δ perspektivisch und dasselbe gilt für die auf 𝔋′ und 𝔋″ liegenden Würfe.

150. Satz: In einer räumlichen Geometrie kann man stets Koordinaten einführen.

Beweis: Die in 133 bis 135 gegebene Einführung von Koordinaten in eine ebene Desarguessche Geometrie läßt sich ohne weiteres auf den Raum übertragen. In den Definitionen 113, 114 tritt an Stelle der Geraden $[A'A'']$ eine Ebene $\{A_1 A_2 A_3\}$, die nicht durch A_0 geht. Dann ist jeder Wurf einem in der Ebene $\{A_0 A_1 A_2\}$ gelegenen gleich. Alle Rechnungsgesetze bleiben daher unverändert bestehen.

Ist jetzt P ein beliebiger Punkt,

$$P_1 = ([A_0 A_1]\{PA_2 A_3\}),\quad P_2 = ([A_0 A_2]\{PA_1 A_3\}),$$
$$P_3 = ([A_0 A_3]\{PA_1 A_2\}),$$

ferner Δ eine beliebige Ebene,

$$D_1 = (\Delta, [A_0 A_1]),\quad D_2 = (\Delta, [A_0 A_2]),\quad D_3 = (\Delta, [A_0 A_3]),$$
$$D' = (\Delta, [A_0 P]),\quad A' = ([A_0 P]\{A_1 A_2 A_3\}),$$

so ist allgemein

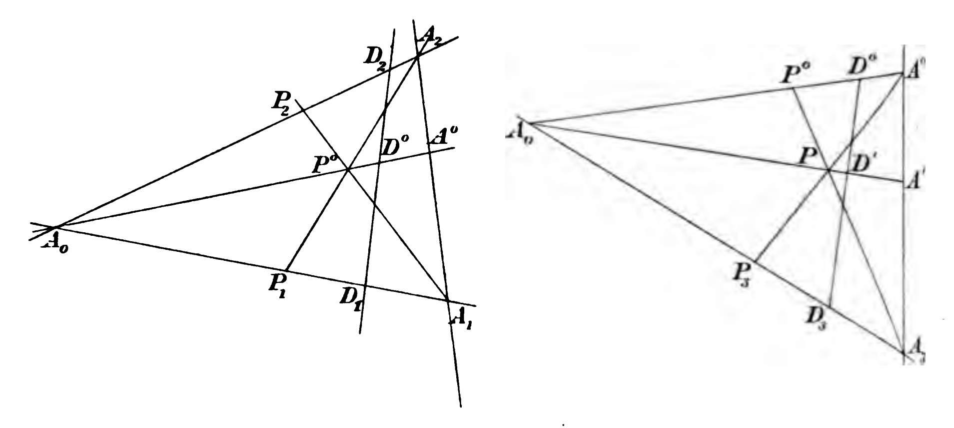
$$(P_1 D_1 A_0 A_1) + (P_2 D_2 A_0 A_2) + (P_3 D_3 A_0 A_3) = (PD' A_0 A'),$$

und insbesondere, wenn und nur wenn P in Δ liegt:

$$(P_1 D_1 A_0 A_1) + (P_2 D_2 A_0 A_2) + (P_3 D_3 A_0 A_3) = 1.$$

Ist nämlich $P^0 = (\{A_0 A_1 A_2\}[A_3 P])$

$$A^0 = (\{A_0 A_1 A_2\}[A_3 A']),\quad D^0 = ([A_0 P^0][D_1 D_2]),$$



und wendet man den Satz 132 auf die Ebene $\{A_0 A_1 A_2\}$, den Punkt P^0, die Gerade $[D_1 D_2]$ an (s. Fig.), so kommt:

$$(P_1 D_1 A_0 A_1) + (P_2 D_2 A_0 A_2) = (P^0 D^0 A_0 A^0).$$

Wendet man zweitens den Satz 132 auf die Ebene $\{A_0 A^0 A_3\}$, den Punkt P, die Gerade $[D^0 D_3]$ an (s. Fig.), so kommt:

$$(P^0 D^0 A_0 A^0) + (P_3 D_3 A_0 A_3) = (PD' A_0 A'),$$

also:

$$(P_1 D_1 A_0 A_1) + (P_2 D_2 A_0 A_2) + (P_3 D_3 A_0 A_3) = (PD' A_0 A').$$

Da schließlich $(PD' A_0 A')$ dann und nur dann gleich Eins ist, wenn $P = D'$ ist, also P in Δ liegt, so folgt auch der zweite Teil des Satzes.

Setzt man nunmehr, wie in 131, 134:

$$(E_1 F_1 A_0 A_1) = -1, \quad (E_2 F_2 A_0 A_2) = -1, \quad (E_3 F_3 A_0 A_3) = -1$$

und:

$$\frac{1}{x_0} x_1 = (P_1 E_1 A_0 A_1), \quad \frac{1}{x_0} x_2 = (P_2 E_2 A_0 A_2), \quad \frac{1}{x_0} x_3 = (P_3 E_3 A_0 A_3)$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = (F_1 D_1 A_0 A_1), \quad \frac{\xi_2}{\xi_0} = (F_2 D_2 A_0 A_2), \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = (F_3 D_3 A_0 A_3),$$

so sind x_0, x_1, x_2, x_3 homogene Koordinaten des Punktes P und ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 homogene Koordinaten der Ebene Δ, und es wird

$$x_0 \xi_0 + x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß P in Δ liegt.*) Die besonderen Lagen von P und Δ erledigen sich wie in 135.

151. In den vorstehenden Entwicklungen hat sich herausgestellt, daß zur vollständigen Begründung der projektiven Geometrie nur noch der Beweis für den Pascalschen Satz oder auch für den projektiven Fundamentalsatz zu liefern ist, daß ein solcher Beweis aus den Grundsätzen der Verknüpfung allein jedoch nicht erbracht werden kann. Wir wenden uns daher zu einer Erweiterung des Systems der Grundsätze.

---

*) Diese Gleichung der Ebene bzw. des Punktes in Wurf-Koordinaten findet sich zuerst bei Sturm, Math. Ann. 9 (1876) p. 346 und W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Zweite Auflage (Leipzig 1875) p. 549 und p. 739. Die erste Herleitung der Gleichung (p. 549) ist von Padova und Sayno in ihrer italienischen Bearbeitung von Fiedlers darstellender Geometrie gegeben, die zweite (p. 739) rührt von Culmann her. Die oben gegebene Herleitung ist unabhängig vom projektiven Fundamentalsatze.

III.

Projektive Geometrie.

Zweite Hälfte.

Die Anordnungssätze.

Die reinen Anordnungssätze.*)

1. Grundsatz: In bezug auf ein Paar verschiedener Elemente eines Grundgebildes erster Stufe (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel) zerfallen alle übrigen Elemente desselben Grundgebildes in zwei Klassen, so daß jedes Element zu einer und nur einer derselben gehört.

2. Grundsatz: Gehören, in einem Grundgebilde erster Stufe, zwei Elemente zu verschiedenen Klassen in bezug auf zwei Elemente, so gehören auch die zwei letzteren zu verschiedenen Klassen in bezug auf die zwei ersteren. Zwei solche Elementenpaare heißen „sich trennend“.

3. Grundsatz: Vier verschiedene Elemente eines Grundgebildes erster Stufe lassen sich stets auf eine und nur auf eine Art in zwei sich trennende Paare teilen.

4. Grundsatz: Die Anordnung ist projektiv; d. h. durch Verbinden und Schneiden entstehen aus sich trennenden Elementenpaaren stets sich trennende Elementenpaare: z. B. zwei sich trennende Geradenpaare eines Büschels schneiden jede Gerade seiner Ebene (aber nicht seines Punktes) in zwei sich trennenden Punktpaaren und verbinden sich mit jeder Geraden seines Punktes (aber nicht seiner Ebene) durch zwei sich trennende Ebenenpaare.

5. Satz: In einer Koordinatengeometrie bestehen die Grundsätze 1, 2, 3, 4, wenn das zugrunde liegende Zahlensystem eine linear geordnete Menge ist.

---

*) Anordnungsaxiome fehlen bei den älteren Autoren, wie schon Gauß (Werke VIII p. 222) hervorhebt: „es müssen solche Worte wie 'zwischen' auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde“. Solche Axiome sind zuerst von Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882) aufgestellt worden.

Beweis: Für vier in einer Geraden liegende verschiedene Punkte A, B, C, D werde folgendermaßen eine Anordnung festgesetzt. Es werde eine Koordinatentransformation vorgenommen, bei welcher $A = (1000)$, $C = (0100)$, ferner zwei beliebige Punkte, mit AC in keiner Ebene, $= (0010)$ und $= (0001)$, ein beliebiger Punkt der Ebene $\{B, (0010), (0001)\}$, in keiner der Geraden $[B(0010)]$, $[B(0001)]$, $[(0010)(0001)]$, gleich (1111), also $B = (1100)$ wird. Wird dann $D = (x, y, 0, 0)$, so ist $x \neq 0$, man kann also $\frac{1}{x} y = p$, $D = (1, p, 0, 0)$ setzen, und es ist $p \neq 0, \neq 1$, so daß einer der drei Fälle statthat:

$$1)\ p < 0, \quad 2)\ 0 < p < 1, \quad 3)\ 1 < p.$$

Im ersten Fall sagen wir: es sind BD und AC getrennt, im zweiten Fall: es sind CD und AB getrennt, im dritten Fall: es sind AD und BC getrennt. Jede beliebige Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0 t \\ y' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \\ z' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \\ t' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t, \end{aligned}$$

bei welcher A, B, C dieselben Koordinaten erhalten, hat die Form

$$\begin{aligned} x' &= x + c_0 z + d_0 t \\ y' &= y + c_1 z + d_1 t \\ z' &= \phantom{x+{}} c_2 z + d_2 t \\ t' &= \phantom{x+{}} c_3 z + d_3 t, \end{aligned}$$

so daß auch D dieselben Koordinaten $(1, p, 0, 0)$ erhält. Bezeichnet man die Koordinatenquadrupel $(1\,0\,0\,0)$, $(1\,1\,0\,0)$, $(0\,1\,0\,0)$, $(1\,p\,0\,0)$ kurz mit $0, 1, \infty, p$, so ist zu zeigen, daß jede Transformation von irgend dreien der A, B, C, D in $0, 1, \infty$ zu derselben Anordnung von A, B, C, D führt.

Die Transformation

$$\text{S)} \qquad \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

führt A, B, C, D über in $\infty, 1, 0, \frac{1}{p}$; ist nun $p < 0$, so ist auch $\frac{1}{p} < 0$, also BD und AC getrennt; ist $0 < p < 1$, so ist $\frac{1}{p} > 1$, also CD und AB getrennt; ist $1 < p$, so ist $0 < \frac{1}{p} < 1$, also AD und BC getrennt; in Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen.

Die Transformation

$$\text{T)}\qquad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

führt A, B, C, D über in $1, 0, \infty, 1-p$; ist nun $p < 0$, so ist $1 - p > 1$, also BD und AC getrennt; ist $0 < p < 1$, so ist $0 < 1 - p < 1$, also CD und AB getrennt; ist $1 < p$, so ist $1 - p < 0$, als AD und BC getrennt; in Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen.

Die Transformation

$$\text{U)}\qquad \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= \frac{1}{p}\, y \end{aligned}$$

führt A, B, C, D über in $0, \frac{1}{p}, \infty, 1$; ist nun $p < 0$, so ist auch $\frac{1}{p} < 0$, also BD und AC getrennt; ist $0 < p < 1$, so ist $\frac{1}{p} > 1$, also AB und CD getrennt; ist $1 < p$, so ist $0 < \frac{1}{p} < 1$, also CB und AD getrennt; ersteres in Übereinstimmung mit den früheren Festsetzungen; die beiden letzteren Fälle zeigen, daß, wenn (z. B.) CD und AB getrennt sind, dann auch AB und CD (Grundsatz 2).

Aus den drei Transformationen:

$$S = \infty\ 1\ 0\ \frac{1}{p}, \quad T = 1\ 0\ \infty\ 1-p, \quad U = 0\ \frac{1}{p}\ \infty\ 1$$

lassen sich nun alle Transformationen zusammensetzen, welche irgend drei der A, B, C, D in irgend einer Folge in $0, 1, \infty$ transformieren. Es wird nämlich:

$ST = 1, \infty, 0, \frac{1}{1-p}$, $\quad TS = \infty, 0, 1, \frac{p-1}{p}$, $\quad STS = 0, \infty, 1, \frac{p}{p-1}$,

$SU = \infty, p, 0, 1$, $\quad TU = 1, \frac{p-1}{p}, \infty, 0$, $\quad U = 0, \frac{1}{p}, \infty, 1$,

$TSU = \infty, 1-p, 1, 0$, $\quad STU = 1, \frac{p}{p-1}, 0, \infty$, $\quad STSU = 0, \frac{1}{1-p}, 1, \infty$,

$SUT = 1-p, \infty, 0, 1$, $\quad TUT = \frac{p}{p-1}, 1, \infty, 0$, $\quad UT = \frac{1}{1-p}, 0, \infty, 1$,

$SUT = p, \infty, 1, 0$, $\quad STUT = \frac{p-1}{p}, 1, 0, \infty$, $\quad STSUT = \frac{1}{p}, 0, 1, \infty$,

$UTS = 0, \infty, \frac{p-1}{p}, 1$, $\quad TUTS = \infty, 1, \frac{1}{1-p}, 0$, $\quad UTS = \infty, 0, \frac{p}{p-1}, 1$,

$UTS = 1, \infty, \frac{1}{p}, 0$, $\quad STUTS = 0, 1, 1-p, \infty$, $\quad STSUTS = 1, 0, p, \infty$.

Die festgesetzte Anordnung der vier Punkte ist daher von der dabei angewendeten Transformation unabhängig. Daß der Grundsatz 2 zunächst für Punktreihen erfüllt ist, wurde bereits hervorgehoben. Auch der Grundsatz 3 besteht zunächst für Punktreihen; denn ist $ABCD$ in $0\ 1\ \infty\ p$ transformiert, so findet einer und nur einer der drei Fälle: $p < 0$, $0 < p < 1$, $1 < p$ statt, also auch einer und nur einer der drei Fälle: BD, AC getrennt, CD, AB getrennt, AD, BC getrennt. Den Grundsatz 1, zunächst für Punktreihen, erfüllt man, indem man in bezug auf AC die Punkte BD in dieselbe oder in verschiedene Klassen rechnet, je nachdem ob Nichttrennen oder Trennen statthaft. Ein Punkt $(1\ p\ 0\ 0)$ gehört der ersten oder zweiten Klasse an, je nachdem ob $p > 0$ oder $p < 0$ ist. Um auch den Grundsatz 4, zunächst für Punktreihen, zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß zwei Punktquadrupel $ABCD$, $A'B'C'D'$ gleich geordnet sind, wenn $A = A'$ ist und $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ sich in einem Punkte schneiden. Man transformiere die Koordinaten derart, daß $A = A' = (1\ 0\ 0\ 0)$, $C = (0\ 1\ 0\ 0)$, $C' = (0\ 0\ 1\ 0)$, ein beliebiger Punkt, der nicht in $\{ACC'\}$ liegt, $= (0\,0\,0\,1)$, ein beliebiger Punkt der Ebene $\{(0\,0\,0\,1)[BB']\}$, der nicht in $[B(0\ 0\ 0\ 1)]$, $[B'(0\ 0\ 0\ 1)]$, $[BB']$ liegt, $= (1\ 1\ 1\ 1)$, also $B = (1\ 1\ 0\ 0)$, $B' = (1\ 0\ 1\ 0)$, $([BB'][CC']) = (0\ 1\ 1\ 0)$ wird. Wird nun $D = (1\ d\ 0\ 0)$, so wird

$$D' = ([(0\ 1\ 1\ 0)\ (1\ d\ 0\ 0)]\ [(1\ 0\ 0\ 0)\ (0\ 0\ 1\ 0)]) = (1\ 0\ d\ 0).$$

Die Ordnung der vier Punkte

$$A' = (1\ 0\ 0\ 0), \quad B' = (1\ 0\ 1\ 0), \quad C' = (0\ 0\ 1\ 0), \quad D' = (1\ 0\ d\ 0)$$

hängt aber, wie man aus der Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= z \\ z' &= y \\ t' &= t \end{aligned}$$

erkennt, von der Ordnung der vier Zahlen $0, 1, \infty, d$ in derselben Weise ab, wie die der vier Punkte A, B, C, D.

Durch zweimalige Anwendung des eben bewiesenen Satzes erhält man: zwei Punktquadrupel $ABCD$, $A'B'C'D'$ sind jedenfalls dann gleich geordnet, wenn $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$ durch einen Punkt gehen. Definiert man nunmehr zwei Geradenpaare eines Büschels oder zwei Ebenenpaare eines Ebenenbüschels als getrennt oder nichtgetrennt, je nachdem ob sie von einer, also von jeder nicht durch den Träger des Büschels gehenden Geraden in zwei getrennten

oder nichtgetrennten Punktpaaren geschnitten werden, so wird nunmehr allen Grundsätzen 1, 2, 3, 4, und zwar auch für Geradenbüschel und Ebenenbüschel, genügt.

6. Definitionen: Zwei Elementenpaare eines Grundgebildes erster Stufe heißen „sich trennend", wenn die Elemente jedes Paares in bezug auf das andere Paar zu verschiedenen Klassen gehören. In einer Ebene heißen ein Geradenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und ein Punktpaar C, D getrennt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $[(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), C]$, $[(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), D]$ getrennte Geradenpaare sind. In einem Bündel heißen ein Geradenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und ein Ebenenpaar $\mathsf{\Gamma}$, $\mathsf{\Delta}$ getrennt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $[\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}\mathsf{\Gamma}]$, $[\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}\mathsf{\Delta}]$ getrennte Geradenpaare sind. Im Raume heißen ein Punktpaar C, D und ein Ebenenpaar $\mathsf{\Gamma}$, $\mathsf{\Delta}$ getrennt, wenn C, D und $([CD]\mathsf{\Gamma})$, $([CD]\mathsf{\Delta})$ getrennte Punktpaare, also $\mathsf{\Gamma}$, $\mathsf{\Delta}$ und $\{[\mathsf{\Gamma}\mathsf{\Delta}]C\}$ $\{[\mathsf{\Gamma}\mathsf{\Delta}]D\}$ getrennte Ebenenpaare sind. Schließlich heißt ein Geradenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ einer Ebene $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ und ein beliebiges Geradenpaar $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ getrennt, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und

$$[(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (\mathfrak{C}\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\})], \quad [(\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (\mathfrak{D}\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\})]$$

getrennte Geradenpaare sind.

7. Satz: Steht zu zwei von den drei Paaren eines Punkttripels A, B, C das Ebenenpaar $\mathsf{\Delta}$, E oder das Geradenpaar $[\{ABC\}\mathsf{\Delta}] = \mathfrak{P}$, $[\{ABC\}\mathsf{E}] = \mathfrak{Q}$ in der gleichen Beziehung des Trennens oder Nichttrennens, so wird es durch das dritte Paar nichtgetrennt.

Beweis: Sei $[(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})A] = \mathfrak{A}$, $[(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})B] = \mathfrak{B}$, $[(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})C] = \mathfrak{C}$. Die drei Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verteilen sich bezüglich $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ auf zwei Klassen; sind also z. B. A, B, also (5) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ getrennt in bezug auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, ebenso A, C, also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ getrennt in bezug auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, so gehören $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu derselben Klasse in bezug auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, d. h. es sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, also auch $\mathsf{\Delta}$, E nichtgetrennt in bezug auf B, C.

8. Satz: Steht zu zwei von den drei Paaren eines Ebenentripels A, B, $\mathsf{\Gamma}$ das Punktpaar DE oder das Geradenpaar $[(\mathsf{A}\mathsf{B}\mathsf{\Gamma})D] = \mathfrak{P}$, $[(\mathsf{A}\mathsf{B}\mathsf{\Gamma})E] = \mathfrak{Q}$ in der gleichen Beziehung des Trennens oder Nichttrennens, so wird es durch das dritte Paar nichtgetrennt.

Beweis dual zu 7.

9. Satz: Steht zu zwei von den drei Paaren eines Geradentripels $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einer Ebene E das Geradenpaar $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ oder das Punktpaar $P = (\mathfrak{P}\mathsf{E})$, $(\mathfrak{Q}\mathsf{E}) = Q$ in der gleichen Beziehung des Trennens oder Nichttrennens, so wird es durch das dritte Paar nichtgetrennt.

Beweis: Man braucht diesen Satz nur für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zu beweisen; dieser ist dual zum Satze 7., soweit er sich auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bezieht.

10. Satz: Steht zu zwei von den drei Paaren eines Geradentripels $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eines Punktes O das Geradenpaar $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ oder das Ebenenpaar $\Delta = \{\mathfrak{P}O\}$, $\mathsf{E} = \{\mathfrak{Q}O\}$ in der gleichen Beziehung des Trennens oder Nichttrennens, so wird es durch das dritte Paar nichtgetrennt.

Beweis dual zu 9.

11. Satz: Steht zu zwei von den drei Paaren eines Geradentripels $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ im Raume das Geradenpaar $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ einer Ebene in der gleichen Beziehung des Trennens oder Nichttrennens, so wird es durch das dritte Paar nicht getrennt.

Beweis: Der Satz wird durch Schneiden von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\}$ auf 7., oder durch Verbinden von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q})$ auf 8. zurückgeführt.

12. Satz: Sind A, B und C, D harmonische Punktpaare, so trennen sich A, B und C, D.

Beweis: Es sei $ABCD \underset{S}{\barwedge} A'B'C'D' \underset{T}{\barwedge} BACD$. Wären nun z. B. AC, BD getrennt, so folgte (4), daß auch $A'C', B'D$ getrennt, und ebenso, daß auch BC, AD getrennt sind, gegen 3.

Folgerung: Nennt man also einen Punkt P und eine Gerade $\mathfrak{Q}$ in der Ebene $\{ABC\}$ getrennt durch ABC, wenn die Punktpaare BC, A_1A', ebenso CA, B_1B', ebenso AB, C_1C' getrennt sind, wo

$$A_1 = ([PA][BC]), \quad B_1 = ([PB][CA]), \quad C_1 = ([PC][AB])$$
$$A' = (\mathfrak{Q}[BC]), \quad B' = (\mathfrak{Q}[CA]), \quad C' = (\mathfrak{Q}[AB])$$

gesetzt ist, so existiert zu jedem Punkte P eine getrennte Gerade, nämlich die der drei Punkte

$$([BC][B_1C_1]), \quad ([CA][C_1A_1]), \quad ([AB][A_1B_1]),$$

welche nach dem Desarguesschen Satze auf einer Geraden liegen, weil $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ durch einen Punkt P gehen.

Dann ergibt sich z. B. aus 7., wenn man die Gerade $\mathfrak{P}$ durch einen von ihr getrennten Punkt P ersetzt, der Satz: Sind BC, A_1A' getrennt und CA, B_1B' getrennt, dann sind auch AB, C_1C' getrennt.

13. Definitionen: Die Punkte einer Geraden A, B, C, D liegen in der „Reihenfolge" $ABCD$, wenn AC und BD getrennte Punktpaare sind. Demnach ist diese Reihenfolge identisch mit den folgenden $ADCB$, $CBAD$, $CDAB$, $BADC$, $BCDA$, $DABC$, $DCBA$; d. h. es sind die zyklischen Permutationen und die Umkehrungen gestattet. Die Reihenfolge von vier beliebigen Punkten $ABCP$ einer Geraden läßt sich daher stets so angeben, daß dabei ABC in dieser

Folge und C als letztes Element des Quadrupels auftritt, also $PABC$ oder $APBC$ oder $ABPC$.

Es besteht die Reihenfolge $ABCDE$, wenn die Reihenfolgen $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$, $BCDE$ bestehen. Diese Definition ist zulässig, da der Satz stattfindet:

14. Satz: Aus irgend zwei solchen der fünf Reihenfolgen $ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$, $BCDE$, welche aus $ABCDE$ durch Fortlassung je eines von zwei aufeinanderfolgenden Elementen entstehen, folgen die drei übrigen.

Beweis: Ist z. B. E das eine fortgelassene Element, also $ABCD$ die eine gegebene Reihenfolge, so kann man annehmen, daß C das andere fortzulassende Element, also $ABDE$ die andere gegebene Reihenfolge ist; denn die andere Annahme (B statt C) kann man durch Umkehrung der Reihenfolge auf diese zurückführen. Aus AD, BC getrennt, AD, BE getrennt, folgt nun AD, CE getrennt, also $ACDE$; aus BD, AE nicht getrennt, BD, AC getrennt, folgt BD, CE nicht getrennt, also $BCDE$; aus BD, AC getrennt, AC, DE nicht getrennt, folgt AC, BE getrennt, also $ABCE$.

15. Definition: Für das Zahlensystem der Würfe, außer (AEA_0A), werden jetzt die Begriffe „größer" ($>$) und „kleiner" ($<$) folgendermaßen eingeführt: Es heißt für $P \neq Q$: $(PEA_0A) < (QEA_0A)$ oder $(QEA_0A) > (PEA_0A)$, wenn eine der folgenden Reihenfolgen statthat:

$$(PQA_0EA),\quad (PA_0QEA),\quad (PA_0EQA),$$
$$(A_0PQEA),\quad (A_0PEQA),\quad (A_0EPQA).$$

Die durch Vertauschung von P mit Q aus diesen sechs Reihenfolgen hervorgehenden sechs Reihenfolgen bedeuten also:

$$(QEA_0A) < (PEA_0A),$$

oder

$$(PEA_0A) > (QEA_0A).$$

Mit diesen zwölf Reihenfolgen sind alle bei fünf Elementen möglichen erschöpft; denn man kann durch zyklische Vertauschung erreichen, daß stets A an letzter Stelle steht und dann durch eventuelle Umkehrung, daß A_0E in dieser Folge auftreten, so daß von den 24 Permutationen von PQA_0E nur noch die Hälfte in Betracht kommen. Demnach ist die Grundeigenschaft erfüllt, daß bei zwei verschiedenen Würfen p, q stets eine und nur eine der beiden Beziehungen

$$p > q \quad \text{oder} \quad p < q$$

erfüllt ist.

16. Satz: Gelten in einer Geometrie die Anordnungsgrundsätze 1, 2, 3, so bilden die Würfe in derselben eine linear geordnete Menge, d. h. es besteht der Grundsatz, daß aus $p < q$, $q < r$ stets $p < r$ folgt.

Beweis: 1) Aus (PQA_0EA), (QRA_0EA) folgt

$$PQA_0E,\ QRA_0E, \text{ also } PRA_0E,$$

hieraus und aus PA_0EA folgt PRA_0EA.

2) Aus PQA_0EA, QA_0REA folgt

$$PA_0EA,\ A_0REA, \text{ also } PA_0REA.$$

3) Aus PQA_0EA, QA_0ERA folgt

$$PA_0EA,\ A_0ERA, \text{ also } PA_0ERA.$$

4) Aus PA_0QEA, A_0QREA folgt

$$PA_0EA,\ A_0REA, \text{ also } PA_0REA.$$

5) Aus PA_0QEA, A_0QERA folgt

$$PA_0EA,\ A_0ERA, \text{ also } PA_0ERA.$$

6) Aus PA_0EQA, A_0EQRA folgt

$$PA_0EA,\ A_0ERA, \text{ also } PA_0ERA.$$

7) Aus A_0PQEA, A_0QREA folgt

$$A_0PQE,\ A_0QRE, \text{ also } A_0PRE,$$

hieraus und aus A_0REA folgt A_0PREA.

8) Aus A_0PQEA, A_0QERA folgt

$$A_0PEA,\ A_0ERA, \text{ also } A_0PERA.$$

9) Aus A_0PEQA, A_0EQRA folgt

$$A_0PEA,\ A_0ERA, \text{ also } A_0PERA.$$

10) Aus A_0EPQA, A_0EQRA folgt

$$EPQA,\ EQRA, \text{ also } EPRA,$$

hieraus und aus A_0EPA folgt A_0EPRA.

Demnach folgt stets aus

$$(PA_0EA) < (QA_0EA), \quad (QA_0EA) < (RA_0EA),$$

daß

$$(PA_0EA) < (RA_0EA)$$

ist, was zu beweisen war.

17. Satz: Ist $p < q < r$ oder $p > q > r$, so ist PR getrennt durch QA und umgekehrt.

Beweis: Aus (z. B.) (PQA_0EA) und (QRA_0EA) folgt PA_0, QA getrennt, RA_0, QA nichtgetrennt, also PR, QA getrennt.

Ist umgekehrt PR getrennt durch QA, so kann z. B. nicht $p < r < q$ $(p > r > q)$ oder $r < p < q$ $(r > p > q)$ sein; da im ersten Fall PQ getrennt durch RA, im zweiten QR getrennt durch PA folgen würde, gegen 3.

18. Satz: Gelten in einer Geometrie die Anordnungssätze 1, 2, 3, 4, so bilden die Würfe in derselben ein linear geordnetes Größensystem, d. h. es gilt für dieselben noch das additive und das multiplikative Anordnungsgesetz.

Beweis: Es sei $p = (P_1E_1A_0A_1)$, $q = (Q_1E_1A_0A_1)$, $r = (R_1E_1A_0A_1)$ usw., $T = ([A_2H_1][A_1P_2])$, $U = ([A_2H_1][A_1Q_2])$, $V = ([A_2H_1][A_1R_2])$ usw., so ist (nach 4) die Reihenfolge $P_2Q_2R_2 \ldots A_2$ dieselbe wie $TUV \ldots A$, also auch wie $T_1, U_1, V_1 \ldots A_1$, wenn $T_1 = ([ET][A_0A_1])$, $U_1 = ([EU][A_0A_1)]$, $V_1 = ([EV][A_0A_1])$ usw. Und es ist

$$(T_1E_1A_0A_1) = (P_1E_1A_0A_1) + (H_1E_1A_0A_1)$$

usw. Es sei zweitens $S = ([A_0A_1][E_2H_1])$, $([P_2S][A_0A_1]) = T_1$, $([Q_2S][A_0A_1]) = U_1$ usw.; also $(P_2E_2A_0A_2)(H_1E_1A_0A_1) = (T_1E_1A_0A_1)$ usw.; demnach ist die Reihenfolge $P_2Q_2R_2 \ldots A_2$ dieselbe wie T_1, U_1, $V_1 \ldots A_1$. Ebenso für die Multiplikation von links.

Aus diesen beiden Sätzen folgen nach I 129 das additive und das multiplikative Anordnungsgesetz.

19. Satz: Die Grundsätze der Anordnung 1, 2, 3, 4 sind unabhängig von sämtlichen Verknüpfungsgrundsätzen, zu denen man noch den Pascalschen Satz hinzunehmen kann.

Beweis: In den Koordinatengeometrien in einem gewöhnlichen imaginären Zahlensystem bestehen sämtliche Verknüpfungsaxiome und der Pascalsche Satz, aber nicht die Anordnungssätze 1, 2, 3, 4, da sonst die Koordinaten, d. h. das imaginäre Zahlensystem (nach 18) ein linear geordnetes Größensystem wäre, was (nach I 145) nicht der Fall ist.

20. Satz: Diejenigen Verknüpfungsgrundsätze, welche sich auf die Existenz von Schnittelementen (Geraden, Punkten) beziehen, sind unabhängig von den Anordnungsgrundsätzen und denjenigen Verknüpfungsgrundsätzen, welche sich auf die Existenz von Verbindungselementen (Ebenen, Geraden) beziehen.

Beweis: Die unter II 11 p. 57 betrachtete Geometrie genügt (nach 5) allen Anordnungsgrundsätzen und den „Verbindungsgrundsätzen", aber nicht den „Schnittgrundsätzen".

Die Existentialsätze der Anordnung.

21. Als Existentialsätze der Anordnung bezeichnen wir Sätze, welche die Existenz von Elementen fordern, die gegebenen Anordnungsbeziehungen genügen sollen.

22. Definition: Unter einem „Pascalschen Netz“ in einer Geometrie soll ein Netz von Elementen verstanden werden, in welchem der Pascalsche Satz gilt.

23. Satz: In jeder Geometrie gibt es Pascalsche Netze.

Beweis: Das durch Verbinden und Schneiden aus fünf Punkten A_0, A_1, A_2, A_3, E des Raumes, deren keine vier in einer Ebene liegen, zu gewinnende Netz ist ein Pascalsches Netz. Für diese Punkte ergeben sich nämlich nach II 148 p. 135 die Koordinaten: $A_0 = (1000)$, $A_1 = (0100)$, $A_2 = (0010)$, $A_3 = (0001)$, $E = (1111)$ und aus diesen durch Verbinden und Schneiden nur Punkte $P = (xyzt)$ mit ganzzahligen Koordinaten x, y, z, t (s. 34), für welche also nach II 110 p. 107 der Pascalsche Satz gilt.

24. Satz: Nimmt man fünf beliebige Punkte eines Pascalschen Netzes, von denen aber keine vier in einer Ebene liegen, als Grundpunkte A_0, A_1, A_2, A_3, E, so bekommen alle Punkte des Pascalschen Netzes Koordinaten aus einem Zahlensystem mit kommutativer Multiplikation.

Beweis folgt aus II 122 u. 148.

25. Definition: Ein Netz heißt „dicht“, wenn es zu jedem Punktpaar des Netzes ein trennendes Punktpaar des Netzes gibt. Ein Netz heißt „relativ-dicht“, wenn es zu jedem Punktpaar einer Geraden des Netzes ein trennendes Punktpaar des Netzes gibt.

26. Grundsatz der relativen Dichte: Es gibt ein relativdichtes Pascalsches Netz. — Betreffs der Unabhängigkeit dieses Satzes von allen vorhergehenden s. 31.

27. Satz: Gilt in einer Geometrie der Grundsatz der relativen Dichte, und wählt man fünf Punkte des relativ-dichten Pascalschen Netzes, von denen keine vier in einer Ebene liegen, als Grundpunkte A_0, A_1, A_2, A_3, E, so bekommen alle Punkte Koordinaten aus einem Zahlensystem, in welchem der (arithmetische) Grundsatz der relativen Dichte gilt.

Beweis: Das Zahlensystem besteht aus den Punktquadrupeln

$$p = (P_1 E_1 A_0 A_1), \quad q = (Q_1 E_1 A_0 A_1)$$

usw. Wird nun das Paar $P_1 Q_1$ durch zwei Punkte X, Y des relativdichten Pascalschen Netzes getrennt, so gehört entweder X oder Y

mit A_1 zu verschiedenen Klassen bezüglich $P_1 Q_1$. Ist also z. B. $P_1 Q_1$ durch XA_1 getrennt, so ist (nach 17) x zwischen p, q. Da nun X die Koordinaten $1, x, 0, 0$ hat, so ist (nach 24) x aus einem Zahlensystem mit kommutativer Multiplikation, was zu beweisen war.

28. Satz: In einer Koordinatengeometrie gilt der Grundsatz der relativen Dichte, wenn in dem zugrunde liegenden Zahlensystem der arithmetische Grundsatz der relativen Dichte gilt.

Beweis: Gilt in dem Zahlensystem der arithmetische Grundsatz der relativen Dichte, so gilt (nach I 134) das kommutative Gesetz der Multiplikation. Demnach besteht der Pascalsche Satz allgemein. Da es ferner auf jeder Geraden $[PQ]$ noch mindestens einen weiteren Punkt R, also auch den in bezug auf PQ harmonischen S gibt, und PQ, RS sich trennen (s. 12), so gibt es zu jedem Punktpaar PQ trennende RS aus dem Pascalschen Netz, welches hier ja alle Punkte umfaßt.

29. Satz: Gilt der Grundsatz der relativen Dichte, so gilt der Pascalsche Satz.

Beweis: 1) Führt man nach II 148 S. 135 Koordinaten ein, so folgt nach 27 für dieselben das Bestehen des arithmetischen Grundsatzes der relativen Dichte, also nach I 134 S. 43 das des kommutativen Gesetzes der Multiplikation und daraus nach II 110 S. 107 das Bestehen des Pascalschen Satzes.

2) Man kann aber, ohne diesen Umweg über die Einführung der Koordinaten zu machen, den Pascalschen Satz oder zweckmäßiger den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie direkt mit Hilfe des Grundsatzes der relativen Dichte beweisen. Wir sprechen den Fundamentalsatz zu dem Zwecke so aus: Stimmen zwei gleiche Punktquadrupel $ABCD$, $ABCD'$ in drei Punkten überein, dann auch im vierten. Es seien erstens A, B, C drei Punkte des Pascalschen Netzes, ferner P, R ein Punktpaar desselben, welches DD' trennt, Q auf $[AB]$ ein beliebiger Punkt desselben, von D, D', P, R verschieden. Die Reihenfolge von Perspektivitäten, welche $ABCD$ in $ABCD'$ überführt, führt auch PQR in PQR' über. Da Perspektivitäten die Anordnung ungeändert lassen, müßten die Punktpaare QD, PR und QD', PR gleichzeitig trennende oder nichttrennende sein, also DD', PR nichttrennend, gegen die Annahme. Es seien zweitens A, B, C nicht drei Punkte des Pascalschen Netzes. Die Perspektivitäten, durch welche $ABCD$ in $ABCD'$ übergehen, kann man als in einer Ebene gelegen annehmen, da man sie andernfalls von einem Punkte des Raumes aus in eine Ebene E von $[AB]$ projizieren kann. Nunmehr seien $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ drei in einer andern Ebene $\bar{\mathsf{E}}$ in einer Geraden liegende

Punkte des Pascalschen Netzes, und es werden ABC mit $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ durch zwei Perspektivitäten verbunden. Durch dieselben beiden Perspektivitäten wird die Figur in E in eine analoge in $\bar{\text{E}}$ übergeführt; in dieser ist aber, nach dem oben Bewiesenen der Punkt $\bar{D} = \bar{D}'$, also ist auch $D = D'$.

30. Satz: Gilt der Pascalsche Satz, so gilt der Grundsatz der relativen Dichte.

Beweis: Da es (nach II 41 S. 61) auf jeder Geraden $[AB]$ noch mindestens einen weiteren Punkt C gibt, so existiert zu jedem Punktpaar AB ein trennendes Punktpaar, nämlich das harmonische CD (12), also ist das vollständige System dicht, also auch relativ dicht. Da es außerdem ein Pascalsches ist, so gibt es ein relativ-dichtes Pascalsches Netz, d. h. es besteht der Grundsatz der relativen Dichte.

31. Demnach ist der Grundsatz der relativen Dichte notwendig und hinreichend, um mit den Verknüpfungs- und Anordnungsgrundsätzen zusammen den Pascalschen Satz, oder was dasselbe ist, den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie zu beweisen.

32. Satz: Der Grundsatz der relativen Dichte ist unabhängig von allen vorhergehenden Grundsätzen.

Beweis: Die Koordinatengeometrien in linear geordneten Größensystemen mit nicht kommutativer Multiplikation.

---

33. Definition: Ein Netz aus fünf Punkten, deren keine vier in einer Ebene liegen, soll ein rationales Netz heißen.

34. Satz: Wählt man irgend fünf zu je vier in keiner Ebene liegende Punkte eines rationalen Netzes zu Grundpunkten eines Koordinatensystems:

$$A_0 = (1000),\quad A_1 = (0100),\quad A_2 = (0010),\quad A_3 = (0001),\quad E = (1111),$$

so besteht das Netz nur aus Punkten $P = (xyzt)$ mit ganzzahligen Koordinaten.

Beweis: Nach Einführung der Koordinaten entspricht das Verbinden und Schneiden dem Auflösen linearer Gleichungen. Die Anfangsgleichungen $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_0 = x_1$, $x_0 = x_2$, $x_0 = x_3$, $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$ der Ebenen $\{A_1A_2A_3\}$, $\{A_0A_2A_3\}$, $\{A_0A_1A_3\}$, $\{A_0A_1A_2\}$, $\{EA_2A_3\}$, $\{EA_1A_3\}$, $\{EA_1A_2\}$, $\{EA_0A_3\}$, $\{EA_0A_2\}$, $\{EA_0A_1\}$ haben ganzzahlige Koeffizienten und durch Auflösung von homogenen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten erhält man immer wieder ganzzahlige Lösungen.

35. Aufgabe: In einem rationalen Netz seien (nach 34) Koordinaten eingeführt; man wähle die Punkte $(x_0y_0z_0t_0)$, $(x_1y_1z_1t_1)$, $(x_2y_2z_2t_2)$,

$(x_3y_3z_3t_3)$, $(x_4y_4z_4t_4)$ des Netzes, deren keine vier in einer Ebene liegen, zu neuen Koordinatengrundpunkten A_0', A_1', A_2', A_3', E'. Im neuen Koordinatensystem erhalte der Punkt $P = (xyzt)$ die Koordinaten $(x'y'z't')$. Man soll die Transformation der Koordinaten angeben.

Auflösung: Man bestimme fünf ganze Zahlen λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 &= 0\\
\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 &= 0\\
\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4 &= 0\\
\lambda_0 t_0 + \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 + \lambda_4 t_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Diese fünf Zahlen sind proportional den fünf Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4\\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix}\right|,$$

von denen keine Null ist, da keine vier der fünf Punkte A_0', A_1', A_2', A_3', E' in einer Ebene liegen. Also kann man λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 alle $\neq 0$ annehmen, dann lautet die Transformation:

$$\begin{aligned}
x &= \lambda_0 x_0 \cdot x' + \lambda_1 x_1 \cdot y' + \lambda_2 x_2 \cdot z' + \lambda_3 x_3 \cdot t'\\
y &= \lambda_0 y_0 \cdot x' + \lambda_1 y_1 \cdot y' + \lambda_2 y_2 \cdot z' + \lambda_3 y_3 \cdot t'\\
z &= \lambda_0 z_0 \cdot x' + \lambda_1 z_1 \cdot y' + \lambda_2 z_2 \cdot z' + \lambda_3 z_3 \cdot t'\\
t &= \lambda_0 t_0 \cdot x' + \lambda_1 t_1 \cdot y' + \lambda_2 t_2 \cdot z' + \lambda_3 t_3 \cdot t'.
\end{aligned}$$

In der Tat gehen dadurch die neuen Koordinaten (1000), (0100), (0010), (0001), (1111) der Punkte A_0', A_1', A_2', A_3', E' in die alten Koordinaten $(x_0y_0z_0t_0)$, $(x_1y_1z_1t_1)$, $(x_2y_2z_2t_2)$, $(x_3y_3z_3t_3)$, $(x_4y_4z_4t_4)$ derselben über.

36. Satz: Alle auf einer Geraden liegenden Punkte eines rationalen Netzes und nur diese erhält man aus irgend dreien von ihnen durch bloße harmonische Konstruktionen.

Beweis: Man kann (mit Rücksicht auf 34) die drei Punkte der Geraden des Netzes als Punkte A_0, E_1, A_1, dann A_2, A_3 im Netze beliebig, aber mit A_0, A_1 in keiner Ebene, dann E unter den Netzpunkten der Ebene $\{E_1A_2A_3\}$, aber nicht der Geraden $[E_1A_2]$, $[E_1A_3]$, $[A_2A_3]$ wählen. Dann ist (nach II 93 S. 99) offenbar, daß man durch harmonische Konstruktionen aus $A_0 = (1000)$, $E_1 = (1100)$, $A_1 = (0100)$

nur Punkte $P = (xy00)$ mit ganzzahligen Koordinaten x, y erhält. Es ist zu zeigen, daß man jeden beliebigen Punkt dieser Art durch bloße Harmonien erhält. Es seien zunächst x und y einerlei Zeichens; man kann dann beide positiv annehmen. Ferner kann man der Kürze halber $x < y$ voraussetzen; die entgegengesetzte Annahme läuft auf eine Vertauschung von A_0 und A_1 hinaus.

Man entwickele $\frac{x}{y}$ in den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_\nu}}}}$$

und bestimme die Näherungswerte*) desselben:

$$\frac{Z_0^{(0)}}{N_0^{(0)}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{Z_1^{(0)}}{N_1^{(0)}} = \frac{1}{1}, \quad \frac{Z_2^{(0)}}{N_2^{(0)}} = \frac{1}{2}, \ldots, \frac{Z_{a_1}^{(0)}}{N_{a_1}^{(0)}} = \frac{1}{a_1}, \quad \frac{Z_1^{(1)}}{N_1^{(1)}} = \frac{1}{a_1 + 1},$$

$$\frac{Z_2^{(1)}}{N_2^{(1)}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{2}}, \ldots, \frac{Z_{a_\nu}^{(\nu-1)}}{N_{a_\nu}^{(\nu-1)}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a^\nu}}}.$$

Dann ist bekanntlich allgemein

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \xi}}} = \frac{Z_{a_k}^{(k-1)} + \xi Z_{a_{k-1}}^{(k-2)}}{N_{a_k}^{(k-1)} + \xi N_{a_{k-1}}^{(k-2)}};$$

demnach ergibt sich für $\xi = 1$ jeder Näherungswert aus zwei vorhergehenden durch „Komposition", d. h. durch Bildung des Bruches aus der Summe der beiden Zähler und der Summe der beiden Nenner, z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{1+0}{1+1}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1+0}{2+1}, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{a_1+1} = \frac{1+0}{a_1+1}, \quad \frac{2}{2a_1+1} = \frac{1+1}{(a_1+1)+a_1}, \quad \ldots;$$

und zwar wird bei der Komposition erstens der unmittelbar vorhergehende, etwa $\frac{c}{d}$, und zweitens derjenige letzte vorhergehende, etwa $\frac{a}{b}$, verwendet, für welchen $\frac{x}{y}$ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ liegt. Es wird also der komponierte Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ gebildet. Liegt nun $\frac{x}{y}$ zwischen

*) Vgl. des Verfassers Aufsatz: Über Näherungswerte und Kettenbrüche, Crelles Journal Bd. 115 (1895) p. 221 ff. und Netto, Über Näherungswerte und Kettenbrüche, Crelles Journal Bd. 125 (1903) p. 34 ff.

$\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$, so entsteht der nächste Näherungswert nach derselben Regel durch Komposition von $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{c}{d}$. Liegt aber $\frac{x}{y}$ zwischen $\frac{a+c}{b+d}$ und $\frac{a}{b}$, so sind ebenso diese beiden zu komponieren. Nun sind aber vier solche Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+2c}{b+2d}$ harmonisch, denn es ist:

$$\frac{\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{a+c}{b+d}}{\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{c}{d}} : \frac{\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}} = -1;$$

also wird die Reihe der Näherungswerte eines Bruches $\frac{x}{y}$ durch Harmonien aus den drei ersten $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ gewonnen. Bezeichnet man die Punkte $(Z_h^{(k)}, N_h^{(k)}, 0, 0)$ mit $P_h^{(k)}$, so gilt für die Reihe der Näherungspunkte:

$$P_0^{(0)} = A_1,\ P_1^{(0)} = E_1,\ P_2^{(0)} = (1, 2, 0, 0), \ldots,\ P_{a_\nu}^{(\nu-1)} = P$$

des Punktes P (nach II 93 S. 99) dasselbe, was zu beweisen war. Es sind z. B. harmonisch $A_1 E_1 A_0 P_2^{(0)}$, $A_1 P_2^{(0)} E_1 P_3^{(0)}$, $A_1 P_3^{(0)} P_2^{(0)} P_4^{(0)}$, usw.

Für einen Punkt $(-x, y, 0, 0)$, wo x und y beide positiv sind, gilt das Entsprechende, wenn man ebenso von $A_0 = (-1, 0, 0, 0)$, $A_1 = (0, 1, 0, 0)$ und $F_1 = (-1, 1, 0, 0)$ ausgeht; F_1 ist der vierte harmonische Punkt zu A_0, A_1, E_1.

37. Satz: Ein rationales Netz enthält alle Punkte $P = (x, y, z, t)$ mit ganzzahligen Koordinaten x, y, z, t.

Beweis: Das Netz enthält nach 36 die Punkte

$$P_1 = (x, y, 0, 0),\ P_2 = (x, 0, z, 0),\ P_3 = (x, 0, 0, t),$$

also auch den Punkt

$$(\{P_1 A_2 A_3\}\ \{P_2 A_1 A_3\}\ \{P_3 A_1 A_2\})$$

d. h. P, denn P, P_1, A_2, A_3, ebenso P, P_2, A_1, A_3 und P, P_3, A_1, A_2 liegen je in einer Ebene.

Sollte $x = 0$ sein, so enthält das Netz nach 36 die Punkte:

$$P' = (0, 0, z, t),\ P'' = (0, y, 0, t),\ P''' = (0, y, z, 0),$$

also auch den Punkt

$$([A_1 P']\ [A_2 P''])$$

d. h. P, denn A_1, P', P, ebenso A_2, P'', P liegen in je einer Geraden.

Sollten von den vier Koordinaten x, y, z, t irgend zwei gleich Null sein, so folgt die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus 36. Sind irgend drei gleich Null, so ist P einer der Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 selbst.

38. Definition: Eine Geometrie heißt meßbar, wenn in ihr der Grundsatz der Meßbarkeit (39) besteht.

39. Grundsatz der Meßbarkeit: Ein rationales Netz ist auf jeder seiner Geraden relativ dicht. Mit Rücksicht auf 36 kann dieser Grundsatz auch so ausgesprochen werden: Auf jeder Geraden kommt man, von drei Punkten ausgehend, durch bloße harmonische Konstruktionen zu einem Punktpaar, das ein gegebenes Punktpaar trennt. (Allgemeinere Form des Satzes.) Derselbe Satz kann in der spezielleren Form ausgesprochen werden: Konstruiert man, von $E_0 E_1 A_1$ auf einer Geraden ausgehend, die Punkte E_2, E_3, E_4, ..., E_{-1}, E_{-2}, E_{-3}, ..., so daß immer $E_{h-1} E_{h+1}$, $E_h A_1$ harmonisch sind, so kommt man schließlich zu einem Punkte E_k, für den $A_1 P$ und $E_0 E_k$ getrennte Punktpaare sind, wenn P ein beliebig gegebener Punkt der Geraden ist. Daß der speziellere Satz den allgemeineren zur Folge hat, ist offenbar; das Umgekehrte ergibt sich aus den folgenden beiden Sätzen.

40. Satz: Gilt der Grundsatz der Meßbarkeit in der allgemeineren Form, so gilt für das Zahlensystem der Koordinaten der arithmetische Grundsatz der Meßbarkeit.

Beweis: Die Koordinaten sind die Punktquadrupel $p = (P_1 E_1 A_0 A_1)$. Sind P_1, Q_1 zwei beliebige Punkte auf $[A_0 A_1]$, so gibt es nach dem Grundsatz der Meßbarkeit ein durch Harmonien aus $A_0 E_1 A_1$ zu gewinnendes Punktpaar X, Y, welches P_1, Q_1 trennt. Demnach ist jedenfalls einer dieser beiden Punkte, z. B. X von A_1 getrennt durch das Paar $P_1 Q_1$; dann ist (nach 17) x zwischen p, q, und x ist (nach 36) eine rationale Zahl. Also liegt zwischen je zwei Zahlen des Systems eine rationale Zahl; ein Satz, der (nach I 138 S. 44) mit dem arithmetischen Grundsatz der Meßbarkeit gleichbedeutend ist.

41. Satz: Gilt für das Zahlensystem einer Koordinatengeometrie der arithmetische Grundsatz des Meßbarkeit, so gilt in der Geometrie selbst der geometrische Grundsatz der Meßbarkeit in der spezielleren Form.

Beweis: Es seien E_0, E_1, P, A_1 vier verschiedene Punkte einer Geraden in dieser Reihenfolge und es seien die Koordinaten derart transformiert, daß $E_0 = (1\,0\,0\,0)$, $E_1 = (1\,1\,0\,0)$, $A_1 = (0\,1\,0\,0)$, $P = (1\,p\,0\,0)$ wird. Dann ist (nach 17) $0 < 1 < p$, und nach Voraussetzung existiert eine ganze Zahl k derart, daß $0 < p < k$ ist. Dann ist (nach 17) das Punktpaar P, A_1 getrennt durch E_0 und $E_k = (1\,k\,0\,0)$

und es sind nach 36 die Punktquadrupel $E_{k-1}E_{k+1}$, A_1E_k harmonisch, so daß der Punkt E_k durch diese speziellen Harmonien gewonnen wird; was zu beweisen war.

42. Satz: Der Grundsatz der Meßbarkeit ist unabhängig von allen vorhergehenden Grundsätzen, mit Einschluß dessen der relativen Dichte (und dessen der Stetigkeit; s. 48).

Beweis: Die Koordinatengeometrien in einem linear geordneten stetigen, nicht meßbaren Größensystem mit kommutativer Multiplikation.

43. Satz: Der Grundsatz der relativen Dichte ist nicht unabhängig vom Grundsatz der Meßbarkeit, sondern auf Grund desselben beweisbar.

Beweis: Besteht der Grundsatz der Meßbarkeit, so besteht für das Zahlensystem der Koordinaten (nach 40) der arithmetische Grundsatz der Meßbarkeit, also (nach I 137 S. 44) der arithmetische Grundsatz der relativen Dichte, also (nach 28) der geometrische Grundsatz der relativen Dichte.

44. Demnach kann man den Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie oder auch des Pascalschen Satzes statt auf den Grundsatz der relativen Dichte auf den der Meßbarkeit gründen, wie es Hilbert, aber unter Hinzunahme des Parallelenaxioms und einiger Kongruenzaxiome, getan hat.*) Hilberts Satz 37, daß der Pascalsche Satz nicht beweisbar sei auf Grund der Verknüpfungs- und der Anordnungsgrundsätze, unter Ausschluß des Grundsatzes der Meßbarkeit, ist dahin zu präzisieren, daß der Pascalsche Satz wohl beweisbar ist, wenn man den Grundsatz der Meßbarkeit durch den weniger enthaltenden Grundsatz der relativen Dichte ersetzt.

45. Hilbert beweist den Pascalschen Satz auf Grund der Meßbarkeit auf dem Umwege über die Einführung der Koordinaten. Man kann aber, ähnlich wie in 29, 2 den Pascalschen Satz, oder besser den projektiven Fundamentalsatz, direkt und rein geometrisch auf Grund der Meßbarkeit beweisen. Es sei also $ABCD = ABCD'$ und zu beweisen, daß $D = D'$ ist. Angenommen, es wäre $D \neq D'$, so kann man nach dem Grundsatz der Meßbarkeit aus A, B, C durch bloße Harmonien ein Punktpaar P, Q herleiten, welches D, D' trennt. Dann ist wenigstens einer der drei Punkte A, B, C, z. B. A, von P und Q verschieden. Die Reihe von Perspektivitäten, welche $ABCD$ in $ABCD'$ überführt, führt je vier harmonische Punkte in vier harmonische, also P und Q in sich über. Da Perspektivitäten die Anordnung ungeändert lassen,

*) Grundlagen der Geometrie, Kap. VI.

müssen die Punktpaare AD, PQ und AD', PQ gleichzeitig trennende oder nicht trennende sein: demnach sind in beiden Fällen DD', PQ nicht trennende Punktpaare, gegen die Annahme.

---

46. Satz: **Auf einer Geraden $[PR]$ wird der Punkt P durch Angabe aller das Punktpaar PR trennenden Punktpaare einer relativ dichten Punktmenge der Geraden eindeutig bestimmt.**

Beweis: Es gibt keinen zweiten Punkt Q, so daß jedes Punktpaar, welches PR trennt, auch QR trennt; denn ist XY ein Punktpaar der relativ-dichten Menge, welches PQ trennt, so ist einer der beiden Punkte, z. B. X, von R getrennt durch PQ; da dann Y von R nicht getrennt ist durch PQ, so ist entweder PR getrennt durch QY oder QR getrennt durch PY. Aus den Reihenfolgen $PXQY$, $PXQR$, $PQRY$ (resp. $PQYR$) folgen (nach 14) $PXRY$, $XQRY$ (resp. $PXYR$, $XQYR$), so daß sich das Paar XY verschieden verhält in bezug auf PR und auf QR.

47. Definition: Eine Geometrie heißt „stetig", wenn in ihr der Grundsatz der Stetigkeit 48 statthat.

48. Grundsatz der Stetigkeit: Es gibt auf jeder Geraden stets Punkte, welche mit irgend einem gegebenen Punkte der Geraden zusammen Paare bilden, die zu beliebig vielen gegebenen Paaren in gegebenen widerspruchslosen Beziehungen des Trennens resp. Nichttrennens stehen.

49. Satz: Gilt der Grundsatz der Stetigkeit, so gilt für das Zahlensystem der Koordinaten der arithmetische Grundsatz der Stetigkeit.

Beweis: Die Koordinaten sind die Punktquadrupel $p_h = (P_h E A_0 A)$. Liegen z. B. die beliebig vielen Punkte P_h, Q_k so, daß stets $A_0 Q_k$ und $P_h A$ sich trennen, so existiert nach Voraussetzung wenigstens ein Punkt X so, daß AX, $Q_k A_0$ sich trennen und daß AX, $P_h A_0$ sich nicht trennen; diese Forderungen sind nämlich mit der Reihenfolge $A_0 P_h Q_k A$ nicht im Widerspruch, da aus $A_0 A$, $P_h Q_k$ getrennt und AA_0, $Q_k X$ nicht getrennt von selbst folgt, daß AA_0, $P_h X$ getrennt, also AX, $P_h A_0$ nicht getrennt sind. Aber aus den Reihenfolgen $A_0 P_h X A$, $A_0 P_h Q_k A$, $A_0 X Q_k A$ folgt (nach 14) noch $P_h X Q_k A$ und aus dieser, wenn man $q_k = (Q_k E A_0 A)$ und $x = (X E A_0 A)$ setzt, (nach 17) $p_h < x < q_k$ oder $p_h > x > q_k$, also die Existenz einer Zahl x des Systems, welche beliebig vielen widerspruchslosen Anordnungsbeziehungen genügt.

50. Satz: Gilt in dem Zahlensystem einer Koordinatengeometrie der arithmetische Grundsatz der Stetigkeit, so gilt in der Geometrie selbst der geometrische Grundsatz der Stetigkeit.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß auf einer Geraden $[A_0 A_1]$ stets ein Punkt X existiert, so daß das Paar XA_1 von gegebenen Paaren getrennt, von andern gegebenen Paaren nicht getrennt wird. Ist nun z. B. PQ ein trennendes Paar, so ist A_0 entweder von P oder von Q nicht getrennt durch XA_1, und die Forderung: XA_1, PQ getrennt, kann durch die beiden Forderungen, XA_1, A_0P getrennt (resp. nicht getrennt), XA_1, A_0Q nicht getrennt (resp. getrennt) ersetzt werden, da aus den Reihenfolgen A_0A_1PX (resp. A_0A_1XP), A_0A_1XQ (resp. A_0A_1QX) nach 15 A_1PXQ (resp. A_1QXP) folgt, d. h. A_1X getrennt durch PQ. Ist ebenso PQ ein nichttrennendes Punktpaar, so ist A_0 entweder von P und Q getrennt durch A_1X oder nicht, und die Forderung: XA_1, PQ nicht getrennt, kann durch die beiden Forderungen: XA_1, PA_0 getrennt (resp. nicht getrennt), XA_1, QA_0 getrennt (resp. nicht getrennt) ersetzt werden, da aus ihnen XA_1, PQ nicht getrennt folgt. Demnach kann man die gegebenen Paare durch lauter Paare A_0P_h, A_0Q_k ersetzen, von denen die ersteren die nichttrennenden, die letzteren die trennenden sein sollen.

Jetzt transformiert man die Koordinaten so, daß $A_0 = (1\,0\,0\,0)$, $A_1 = (0\,1\,0\,0)$ wird; dadurch werde $P_h = (1, p_h, 0, 0)$, $Q_k = (1, q_k, 0, 0)$.

Damit ein Punkt X existieren kann entsprechend den Reihenfolgen $A_0P_hXA_1$, $A_0XQ_kA_1$, sind jedenfalls die daraus (nach 14) folgenden $A_0P_hQ_kA_1$ erforderlich. Aus diesen folgt nach 17 entweder $0 < p_h < q_k$ oder $0 > p_h > q_k$ und wegen der Stetigkeit die Existenz einer Zahl x, für welche entweder $p_h < x < q_k$ oder $p_h > x > q_k$ ist. Nennt man X den Punkt $(1, x, 0, 0)$, so folgen nach 14 für diesen die Reihenfolgen $A_0P_hXA_1$ und $A_0XQ_kA_1$, d. h. das Paar A_1X wird durch sämtliche Paare A_0P_h nicht getrennt, durch sämtliche Paare A_0Q_k getrennt, womit der Satz bewiesen ist.

51. Satz: Der Grundsatz der Stetigkeit ist unabhängig von allen vorhergehenden, mit Einschluß dessen der relativen Dichte und dessen der Meßbarkeit.

Beweis: Die Koordinatengeometrien im System der gewöhnlichen rationalen Zahlen.

52. Satz: Der Grundsatz der relativen Dichte ist unabhängig vom Grundsatz der Stetigkeit.

Beweis: In einer Koordinatengeometrie eines stetigen Zahlensystems mit nichtkommutativer Multiplikation (s. I 133) gilt nach 50 der Grundsatz der Stetigkeit, aber nach II 110 S. 107 nicht der Pascalsche Satz, also nach 29 nicht der Grundsatz der relativen Dichte.

Dagegen ist der Grundsatz der relativen Dichte oder, was nach 31 dasselbe ist, der projektive Fundamentalsatz aus dem Dedekindschen

Grundsatz der Stetigkeit herzuleiten. Es ist dies der vor Hilbert übliche Weg zum Beweise des Fundamentalsatzes.*) Die Dedekindsche Stetigkeit ist projektiv so zu formulieren: **Ist P ein beliebiger Punkt einer Geraden und teilt man alle übrigen Punkte der Geraden in zwei Klassen A_k und B_k, so daß P nie von einem Punkte einer Klasse durch zwei Punkte der andern Klasse getrennt ist, so existiert ein bestimmter Punkt Q auf der Geraden, so daß P und Q getrennt** werden durch je zwei Punkte $A_k \neq Q$ und $B_k \neq Q$.

Unter dieser Voraussetzung sei also zu beweisen, daß durch eine Reihe von Perspektivitäten, durch welche drei Punkte A, B, C einer Geraden sich selbst entsprechen, auch jeder andere Punkt P der Geraden mit einem entsprechenden P' zusammenfällt. Es sei nun $D (\neq D')$ getrennt von z. B. C durch die beiden andern Punkte A, B. Dann ist auch, da Perspektivitäten die Anordnung ungeändert lassen (4), D' getrennt von C durch AB. Aus den Punkten, welche von C getrennt sind durch AD, bilde man die folgenden beiden Klassen. Die Klasse der Punkte P_k umfasse diejenigen sich nicht selbst entsprechenden Punkte, für welche auch kein von C durch $P_k D$ getrennter Punkt sich selbst entspricht. Die Klasse der Punkte Q_k umfasse diejenigen Punkte, für welche wenigstens ein von C durch $Q_k D$ getrennter sich selbst entsprechender Punkt existiert. Jeder von C durch $P_k D$ getrennte Punkt gehört zur ersten Klasse; denn existierte ein solcher Punkt Q_k der zweiten Klasse, so existierte ein von C durch $Q_k D$ getrennter, sich selbst entsprechender Punkt R; dann folgte aus $P_k D, Q_k C$ getrennt, daß $P_k Q_k, DC$ nicht getrennt, und aus $Q_k D, RC$ getrennt, daß $Q_k R, DC$ nicht getrennt, und daraus $P_k R, DC$ nicht getrennt, also $P_k D, RC$ getrennt, gegen die Definition von P_k. Demnach existiert mindestens ein Punkt X so, daß $XD, P_k C$ getrennte, $XD, Q_k C$ nicht getrennte Paare sind, denn aus den Reihenfolgen CDP_kX und

---

*) Es ist dabei nicht nötig, wie es meistens geschieht, die ursprüngliche Definition der Projektivität als einer Folge von Perspektivitäten zu verlassen und durch die v. Staudtsche Definition derselben als eine eindeutige Harmonien erhaltende Beziehung zu ersetzen. Die letztere Definition ist zu eng, da auch Reihen diskreter Punkte projektiv sein können. Andrerseits kommt natürlich dem Satze, daß Harmonien erhaltende eindeutige Beziehungen stets Folgen von Perspektivitäten sind, selbständiges Interesse zu. Die ursprüngliche Definition ist z. B. beibehalten bei Thomae, Ebene geom. Gebilde 1. und 2. Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage (Halle 1873) p. 11. Die v. Staudtsche Definition der Projektivität glaubte Klein (Math. Ann. 7, 1874, p. 536) durch den Zusatz ergänzen zu müssen, daß die Projektivität eine die Ordnung erhaltende Beziehung ist; ein Zusatz, den Darboux (Math. Ann. 17, 1880, p. 55) als überflüssig nachwies.

$CDXQ_k$ folgen die stattfindenden CDP_hQ_k, so daß die Ordnungsbeziehungen einander nicht widersprechen. Ein solcher Punkt X hat die folgenden Eigenschaften. Erstens ist er von C getrennt durch AD; denn aus den Reihenfolgen CDQ_kA, $CDXQ_k$ folgt (15) $CDXA$, also CX, DA getrennt. Zweitens ist er von jedem Punkte P_h und jedem Punkte Q_k verschieden, da sonst nicht XD, P_hC getrennte und XD, Q_kC nicht getrennte Paare wären. Wäre nun X ein sich nicht selbst entsprechender Punkt, so würde er entweder zur Klasse P_h oder zur Klasse Q_k gehören. Demnach ist X ein sich selbst entsprechender Punkt. Drittens existiert kein sich selbst entsprechender Punkt R getrennt von C durch XD, da sonst X zur Klasse Q_k gehören würde.

Genau ebenso (indem man A mit B vertauscht) weist man die Existenz eines sich selbst entsprechenden Punktes Y nach, getrennt von C durch YD, für den kein sich selbst entsprechender Punkt R getrennt von C durch XD, existiert.

Nun sind CD, XY getrennte Paare; denn aus den Reihenfolgen $BCAD$, $BCDY$ folgt (15) $CADY$ oder CD, AY getrennt, und aus CX, DA getrennt folgt CD, AX nicht getrennt, also schließlich CD, XY getrennt. Jeder Punkt R, getrennt von C durch XY, ist also von D nicht getrennt durch XY, also findet entweder die Reihenfolge $XRDY$ oder $XDRY$ statt. Im ersten Fall folgt aus XD, RY getrennt und XD, CY nicht getrennt, daß XD, RC getrennt sind; also ist R kein sich selbst entsprechender Punkt. Im zweiten Fall folgt aus XR, DY getrennt und XC, DY nicht getrennt, daß CR, DY nicht getrennt sind; also ist wiederum R kein sich selbst entsprechender Punkt. Also gäbe es keinen sich selbst entsprechenden Punkt getrennt von C durch XY; andrerseits ist aber der vierte harmonische von C in bezug auf XY nach 12 ein solcher, so daß die Annahme, es gäbe einen sich nicht selbst entsprechenden Punkt D, unrichtig sein muß.*)

---

*) Der v. Staudtsche Beweis des Fundamentalsatzes (Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, p. 50) ist unvollständig, nicht wie Klein (Math. Ann. 6 (1873) p. 112) meint, weil das Parallelenaxiom dabei vorausgesetzt wird — denn solange nicht metrische Axiome hinzukommen, ist das Parallelenaxiom gleichbedeutend der bloßen Bezeichnung einer bestimmten Ebene, ihrer Punkte und Geraden als „uneigentlich" (s. affine Geometrie) —, sondern weil v. Staudt nur beweist: Die tautologen (sich selbst entsprechenden) Punkte einer Projektivität mit drei tautologen Punkten liegen dicht. Der Mangel wurde beseitigt von Lüroth und Zeuthen (Math. Ann. 7, 1873, p. 535), welche auf Grund der (Dedekindschen) Stetigkeit als Hilfssatz beweisen, daß die Menge der tautologen Punkte relativ dicht liegt. Der einfachere Weg (45), diesen Hilfssatz, der nichts

53. Es hat sich also herausgestellt, daß von den beiden Grundsätzen der Meßbarkeit und der Dedekindschen Stetigkeit jeder zum Beweise des projektiven Fundamentalsatzes hinreicht, da jeder von beiden als hierfür allein wesentlichen Bestandteil den Grundsatz der relativen Dichte enthält.

Man kann dem Grundsatz der relativen Dichte nicht den Mangel der Anschaulichkeit vorwerfen oder die Unmöglichkeit, ihn empirisch zu verifizieren, da diese Mängel den Grundsätzen der Meßbarkeit und der Stetigkeit in ähnlicher Weise zukommen. Übrigens ist (wegen 31) die empirische Verifizierung des Pascalschen Satzes zugleich eine solche des Grundsatzes der relativen Dichte, aber nicht der Meßbarkeit und nicht der Stetigkeit. Nun ist es zwar kaum zulässig, den Pascalschen Satz als Erfahrungstatsache anzunehmen; wir werden diesen Satz aber (s. metrische Geometrie) auf Grund der Kongruenzgrundsätze beweisen, die ihrerseits ihren Ursprung in der Kenntnis der Bewegung starrer Körper haben.*) Bei voller Ausnutzung des Erfahrungsinhalts wird also der Grundsatz der relativen Dichte ein beweisbarer Satz, während die Grundsätze der Meßbarkeit und der Stetigkeit nach wie vor unbeweisbar bleiben.

54. Hilbert führt an Stelle der Dedekindschen Stetigkeit den Grundsatz der Vollständigkeit ein, wonach die Dedekindsche Stetigkeit aus der Meßbarkeit und der Vollständigkeit zusammengesetzt ist. Diese subordinierte Zerlegung, in welcher der Grundsatz der Vollständigkeit den der Meßbarkeit bereits voraussetzt, wird hier durch eine koordinierte Zerlegung der Dedekindschen Stetigkeit in Meßbarkeit und reine Stetigkeit (nach 48) ersetzt; und es zeigt sich, daß von diesen beiden Bestandteilen der Dedekindschen Stetigkeit nur die Meßbarkeit denjenigen Grundsatz enthält, welcher zum Beweise des projektiven Fundamentalsatzes notwendig und hinreichend ist.

---

anderes ist als die projektive Form des Archimedischen Axioms der Meßbarkeit und der weniger fordert als die (Dedekindsche) Stetigkeit, an Stelle der Stetigkeit als Grundsatz einzuführen, blieb damals unbemerkt. Den im Lüroth-Zeuthenschen Beweis vorkommenden Grenzprozeß ersetzen Thomae (l. c. p. 12) und Schur (Math. Ann. 18, 1881, p. 252) durch stetige Bewegung. Einen anderen auf der Stetigkeit beruhenden Beweis des Fundamentalsatzes gibt Balser (Math. Ann. 55, 1901, p. 293), der auch bemerkt (p. 298), daß man die Stetigkeit durch das Archimedische Axiom ersetzen kann. Balsers Formulierung desselben als „Satzes vom Fluchtpunkt" stimmt wesentlich mit unserer speziellen Form des Grundsatzes (s. 39) überein.

*) Es kommt hier weder darauf an, woher diese Kenntnis stammt, noch ob ihr in der Wirklichkeit etwas entspricht, sondern nur darauf, daß wir sie zu haben glauben.

55. Der ebene Desarguessche Satz. Die gegebene Begründung der projektiven Geometrie bezieht sich zwar zunächst auf den Raum; sie kann aber unmittelbar auf die Ebene übertragen werden, wenn in dieser der Desarguessche Satz besteht. Um die ebene projektive Geometrie unabhängig vom Raume zu begründen, wäre es also noch nötig, den Desarguesschen Satz mit Hilfe der neu eingeführten Grundsätze zu beweisen. Dabei ist erstens zu bemerken, daß der Grundsatz der Meßbarkeit nur in der Form ausgesprochen werden darf: Das aus vier Punkten, deren keine drei in einer Geraden liegen, abzuleitende Netz liegt auf jeder seiner Geraden relativ dicht. Denn die Zurückführung der Netzpunkte auf durch bloße Harmonien erzeugbare Punkte setzte den zweiten Harmoniesatz, also den Desarguesschen Satz, voraus. Zweitens ist zu beachten, daß hier nicht die Meßbarkeit und die Stetigkeit den Grundsatz der relativen Dichte einschließen, da die diesbezüglichen Beweise ebenfalls den Desarguesschen Satz bereits voraussetzen. Die Unabhängigkeit des Desarguesschen Satzes von den reinen Anordnungsgrundsätzen und der Stetigkeit folgt ohne weiteres aus der in II 59 (S. 68) betrachteten Nicht-Desarguesschen Geometrie, wenn man in derselben ein reelles stetiges Zahlensystem zugrunde legt. Ob aber in dieser Geometrie der Grundsatz der relativen Dichte oder der der Meßbarkeit (in der obigen Form) besteht, wenn man ein meßbares Zahlensystem zugrunde legt, lassen wir hier dahingestellt.

Imaginäre Elemente.

56. Da die Grundsätze der Verknüpfung, der Anordnung und der relativen Dichte ausreichen, um Koordinaten aus einem gewöhnlichen reellen Zahlensystem einzuführen, kann man nunmehr als imaginäre Elemente solche mit imaginären Koordinaten definieren. Man kann aber auch, wie v. Staudt*) gezeigt hat, auf rein geometrischem Wege zu den imaginären Elementen gelangen, indem man sie in bestimmter Weise durch reelle repräsentiert, so daß alle Konstruktionen, in welchen imaginäre Elemente vorkommen, auf solche mit lauter reellen Elementen zurückgeführt werden.

Wie in der Arithmetik ein Paar konjugiert imaginäre Zahlen entweder als das gemeinsame harmonisch zu zwei sich trennenden

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage (Nürnberg 1856) § 7, p. 76. Vgl. auch Stolz, Math. Ann. 4 (1871) p. 416; August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie (Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin 1872); Lüroth, Math. Ann. 8 (1875) p. 145; Grünwald, Zeitschrift f. Math. u. Physik 45 (1900) p. 10.

Paaren reeller Zahlen (s. I 109) oder als die beiden aequianharmonischen Zahlen zu einem Tripel reeller Zahlen betrachtet werden kann, so kann man in der Geometrie ein Paar konjugiert imaginärer Punkte entweder durch zwei Paare reeller Punkte einer Geraden oder durch ein Tripel reeller Punkte einer Geraden repräsentieren. Die erstere Darstellung ist die v. Staudtsche; dieselbe soll die harmonische heißen. Die zweite Darstellung ist einfacher; sie soll die aequianharmonische heißen.*) Der Übergang von der einen zur andern ist der folgende. Sind (ABC) drei Punkte, die einen imaginären Punkt in einer aequianharmonischen Darstellung repräsentieren, und sind AA', BC harmonische Paare, ebenso BB', AC und CC', AB, so repräsentieren irgend zwei der drei Paare AA', BB', CC' den Punkt in einer harmonischen Darstellung, von der man zu jeder andern solchen A_1A_1', B_1B_1' übergeht, indem man Involutionen $\begin{pmatrix} A & B & A_1 \\ A' & B' & A_1' \end{pmatrix}$ usw. bildet.

Umgekehrt kann aber die aus ABC abgeleitete Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ aus zwei Paaren $\begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}$ (z. B.) nur dann gewonnen werden, wenn der Wurf $AA'BB' = -3$ ist. Denn aus $AA'BC = -1$, $BB'AC = -1$ folgt $ABA'C = 2$, $ABCB' = 2$ also $ABA'B' = 4$, $AA'BB' = -3$. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muß zunächst BB' durch ein mit AA', BB' in Involution befindliches Paar ersetzt werden, für welches die angegebene Bedingung besteht. Dann findet man C aus $BB'AC = -1$, und ABC als aequianharmonische Darstellung desselben imaginären Punktes. Die Auffindung eines solchen Paares BB' ist zwar stets, aber nicht durch eine lineare Konstruktion möglich.

Die aequianharmonische Darstellung ist einfacher als die harmonische, da sie von weniger Elementen abhängt und infolgedessen auch die Darstellungen eines und desselben imaginären Elementes weniger mannigfaltig sind.**) Daß eine Repräsentation eines imaginären Elementes durch bloß zwei reelle Elemente unmöglich ist, folgt aus der in II 67 (S. 76) betrachteten singulären Geometrie.

---

*) Dieselbe ist identisch mit der von Klein (Gött. Nachr. 1872 p. 373 = Math. Ann. 22, 1883, p. 242) vorgeschlagenen, von Lüroth (Math. Ann. 11, 1877, p. 84) behandelten Auffassung der Paare konjugiert imaginärer Punkte als Doppelpunktpaare zyklischer Projektivitäten $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$; vgl. z. B. Schröter, Math. Ann. 10 (1876) p. 420; Harnack, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22 (1877) p. 38.

**) Letzteres trifft allerdings nicht zu, wenn man zur harmonischen Darstellung nur Paare eines speziellen Wurfes, z. B. $AA'BB' = -3$ (wie oben) oder $AA'BB' = -1$ (v. Staudt) verwendet.

Die aequianharmonische Darstellung der imaginären Elemente ruht wie die harmonische auf analytischem Grunde, soll aber nunmehr rein geometrisch entwickelt werden.

57. Definition: Drei verschiedene Punkte ABC einer Geraden heißen ein „imaginärer“ Punkt der Geraden. Die drei imaginären Punkte ABC, BCA, CAB seien identisch, die zwei Punkte ABC, CBA heißen „konjugiert“. Drei verschiedene Ebenen $\mathsf{AB\Gamma}$ einer Geraden heißen eine „imaginäre“ Ebene der Geraden. Die drei imaginären Ebenen $\mathsf{AB\Gamma}$, $\mathsf{B\Gamma A}$, $\mathsf{\Gamma AB}$ seien identisch, die zwei Ebenen $\mathsf{AB\Gamma}$, $\mathsf{\Gamma BA}$ heißen „konjugiert“. Drei verschiedene Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ eines Büschels heißen eine „imaginäre“ Gerade eines Büschels.*) Drei verschiedene Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, die sich zu je zweien nicht schneiden, heißen eine „imaginäre“ Gerade des Raumes.*) Die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ seien identisch, die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ heißen „konjugiert“. Die nichtimaginären Elemente heißen „reell“.

58. Definition: Die beiden imaginären Punkte (ABC) und $(A'B'C')$ einer reellen Geraden heißen identisch, wenn und nur wenn die drei Würfe:

$$A'ABC,\ B'BCA,\ C'CAB$$

gleich sind.

59. Satz: Ein imaginärer Punkt (ABC) kann stets durch ein Tripel (OPQ) eindeutig repräsentiert werden, von dem O ein gegebener Punkt der Geraden $[AB]$ ist.

Beweis: Man konstruiere P und Q aus

$$PBCA = OABC, \quad QCAB = OABC;$$

dann ist $(ABC) = (OPQ)$ und die Punkte P, Q ergeben sich eindeutig (II 118 S. 112).

60. Definition: Der imaginäre Punkt (ABC), die imaginäre Gerade $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$, die imaginäre Ebene $\{\mathsf{AB\Gamma}\}$ koinzidieren, wenn A in $\mathfrak{A}$ in A, B in $\mathfrak{B}$ in B, C in $\mathfrak{C}$ in $\mathsf{\Gamma}$ liegt.

61. Satz: Zwei imaginäre Ebenen $\{\mathsf{AB\Gamma}\}$, $\{\mathsf{A'B'\Gamma'}\}$ einer reellen Geraden sind identisch, wenn und nur wenn die drei Würfe (II 149 S. 135)

$$\mathsf{A'AB\Gamma},\ \mathsf{B'B\Gamma A},\ \mathsf{\Gamma'\Gamma AB}$$

gleich sind.

Beweis: Werden die sechs Ebenen $\mathsf{AB\Gamma A'B'\Gamma'}$ von einer reellen Geraden $\mathfrak{G}$ in den sechs Punkten $ABCA'B'C'$ geschnitten, so sind (ABC), $(A'B'C')$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit den beiden Ebenen.

*) Imaginäre Gerade erster und zweiter Art bei z. B. Grünwald l. c.; niedrigimaginäre und hochimaginäre Gerade bei Klein, Nicht-Euklidische Geometrie (Göttingen 1893) II p. 40.

Also folgt aus

$$\{\mathsf{AB\Gamma}\} = \{\mathsf{A'B'\Gamma'}\}$$

zunächst

$$(ABC) = (A'B'C'),$$

also (58)

$$A'ABC = B'BCA = C'CAB,$$

also (II 149 S. 135)

$$\mathsf{A'AB\Gamma} = \mathsf{B'B\Gamma A} = \mathsf{\Gamma'\Gamma AB}$$

und umgekehrt.

62. Satz: Eine imaginäre Ebene $\{\mathsf{AB\Gamma}\}$ kann stets durch ein Tripel $\{\mathsf{\Omega\Pi P}\}$ eindeutig repräsentiert werden, von dem Ω eine gegebene Ebene der Geraden $[\mathsf{AB}]$ ist.

Beweis: Man konstruiere Π, P aus

$$\mathsf{\Pi B\Gamma A} = \mathsf{\Omega AB\Gamma}, \quad \mathsf{P\Gamma AB} = \mathsf{\Omega AB\Gamma};$$

dann ist

$$\{\mathsf{AB\Gamma}\} = \{\mathsf{\Omega\Pi P}\}$$

(nach 61) und die Ebenen Π, P ergeben sich eindeutig (II 118 S. 112 und 149 S. 135).

63. Satz: Haben vier Gerade $\mathfrak{ABCD}$ mehr als zwei, also beliebig viele Transversalen, so ist der Wurf der vier Schnittpunkte auf jeder Transversalen derselbe.

Beweis: Sind $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{ABCD}$ mit drei Transversalen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$, und sind $A'B^0C^0D''$ die Schnittpunkte von $[A'D'']$ mit den vier Ebenen $\{\mathfrak{G}A'\}$, $\{\mathfrak{G}B'\}$, $\{\mathfrak{G}C'\}$, $\{\mathfrak{G}D'\}$, so ist $A'B'C'D' \barwedge A'B^0C^0D'' \barwedge A''B''C''D''$, also (II 140 S. 130)

$$A'B'C'D' = A''B''C''D''.$$

64. Definition: Haben vier Gerade $\mathfrak{ABCD}$ mehr als zwei, also beliebig viele Transversalen, so heißt der Wurf der vier Schnittpunkte irgend einer Transversalen Wurf der vier Geraden $\mathfrak{ABCD}$.

65. Satz: Zwei imaginäre Gerade $\mathfrak{ABC}$, $\mathfrak{A'B'C'}$ sind identisch, wenn und nur wenn die vier Würfe

$$\mathfrak{A'ABC}, \quad \mathfrak{B'BCD}, \quad \mathfrak{C'CAB}$$

existieren und gleich sind.

Beweis: Ist die Bedingung erfüllt und sind $ABCA'B'C'$ die sechs Schnittpunkte von $\mathfrak{ABCA'B'C'}$ mit irgend einer der dann existierenden Transversalen, so folgt (62):

$$A'ABC = B'BCA = C'CAB,$$

also (58)

$$(ABC) = (A'B'C'),$$

demnach ist jeder Punkt der einen zugleich Punkt der andern Geraden. Entsprechend gilt das Umgekehrte.

66. Satz: Eine imaginäre Gerade $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ kann stets durch ein Tripel $[\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}]$ eindeutig repräsentiert werden, wenn $\mathfrak{O}$ eine beliebige Transversale der Transversalen von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, resp. eine Gerade desselben Büschels ist.

Beweis: Man konstruiere $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ aus

$$\mathfrak{P}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{O}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{O}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C},$$

dann ist $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{Q}]$ (nach 65) und die Geraden $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ ergeben sich eindeutig (nach II 140 S. 130 und 63 S. 166).

67. Satz: Zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade, auch wenn nicht beide reell sind.

Beweis: Der imaginäre Punkt (ABC) und der reelle Punkt P auf $[AB]$ haben die reelle Verbindungsgerade $[AB]$ und offenbar keine andere.

Der imaginäre Punkt (ABC) und der reelle Punkt P, nicht auf $[AB]$, haben die imaginäre Verbindungsgerade $[[PA], [PB], [PC]]$ und keine andere.

Die zwei imaginären Punkte (ABC), $(A'B'C')$ einer reellen Geraden haben diese und keine andere zur Verbindungsgeraden.

Die zwei imaginären Punkte (ABC), $(A'B'C')$ zweier sich nicht schneidenden Geraden haben $[[AA'], [BB'], [CC']]$ und keine andere zur imaginären Verbindungsgeraden.

Zwei imaginäre Punkte zweier sich in einem Punkte O schneidenden Geraden stelle man als (OPQ), $(OP'Q')$ dar (59); dann ist

$$[[O([P'Q']\ [P''Q''])], [PP'], [QQ']]$$

und keine andere Gerade ihre imaginäre Verbindungsgerade.

68. Satz: Zwei Ebenen haben genau eine Schnittgerade, auch wenn nicht beide reell sind.

Beweis: Dual im Raume zu 67.

69. Satz: Zwei Gerade einer reellen Ebene haben genau einen Schnittpunkt, auch wenn nicht beide reell sind.

Beweis: Dual in der Ebene zu 67.

70. Satz: Zwei Gerade eines reellen Punktes haben genau eine Verbindungsebene, auch wenn nicht beide reell sind.

Beweis: Dual im Bündel zu 68.

71. Satz: Eine imaginäre Gerade $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ hat mit einer nicht durch sie gehenden reellen Ebene E genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ Gerade eines Büschels, so ist $((\mathfrak{A}\mathsf{E}), (\mathfrak{B}\mathsf{E}),$

$(\mathfrak{C}\mathsf{E}))$ der Schnittpunkt. Im andern Fall sei $\mathfrak{S}$ eine Transversale von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; dann ist $\big[[\{\mathfrak{S}\mathfrak{A}\}\mathsf{E}]\,[\{\mathfrak{S}\mathfrak{B}\}\mathsf{E}]\,[\{\mathfrak{S}\mathfrak{C}\}\mathsf{E}]\big]$ eine Gerade des Schnittpunkts. Ebenso findet man eine zweite, dann nach 69 ihren Schnittpunkt. Die Eindeutigkeit des Schnittpunktes ergibt sich leicht aus den Definitionen.

72. Satz: Eine imaginäre Gerade hat mit einem nicht auf ihr liegenden reellen Punkt genau eine Verbindungsebene.

Beweis: Dual zu 71.

73. Satz: Drei Punkte keiner Geraden, auch wenn sie nicht alle reell sind, oder eine Gerade und ein Punkt nicht auf ihr, auch wenn nicht beide reell sind, oder zwei verschiedene Gerade eines Punktes, auch wenn nicht beide reell sind, haben genau eine Verbindungsebene.

Beweis: Es seien (ABC), $(A'B'C')$, $(A''B''C'')$ die drei Punkte; liegen erstens die drei Geraden $[ABC]$, $[A'B'C']$, $[A''B''C'']$ in einer reellen Ebene, so ist dies die Verbindungsebene. Liegen zweitens nur zwei der drei Geraden, z. B. $[A'B'C']$, $[A''B''C'']$ in einer reellen Ebene E, so kann man mit Rücksicht auf 59 annehmen, daß $A' = A''$ ist und A in E liegt. Dann existiert die Verbindungsgerade $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ der beiden Punkte in E, von der man annehmen kann, daß $\mathfrak{A}$ durch A geht. Dann ist

$$\Big\{\big\{\mathfrak{A}[\{\mathfrak{B}B\}\ \{\mathfrak{C}C\}]\big\}\ \{\mathfrak{B}B\}\ \{\mathfrak{C}C\}\Big\}$$

die Verbindungsebene. Liegen drittens je zwei der drei Geraden $[ABC]$, $[A'B'C']$, $[A''B''C'']$ in keiner reellen Ebene, so bringe man irgend zwei der drei Verbindungsgeraden

$$\big[[AA']\,[BB']\,[CC']\big],\quad \big[[AA'']\,[BB'']\,[CC'']\big],\quad \big[[A'A'']\,[B'B'']\,[C'C'']\big]$$

mit einer reellen Ebene zum Schnitt (71); bestimme nach 67 ihre Verbindungsgerade. Der reelle Punkt derselben ist ein Punkt der gesuchten Ebene; letztere wird dann aus diesem reellen Punkt und einer der drei imaginären Graden (nach 72) gefunden.

74. Satz: Drei Ebenen keiner Geraden, auch wenn sie nicht alle reell sind, oder eine Gerade und eine nicht durch sie gehende Ebene, auch wenn nicht beide reell sind, oder zwei verschiedene Gerade einer Ebene, auch wenn nicht beide reell sind, haben genau eine Verbindungsebene.

Beweis: Dual zu 73.

75. Satz: Für die Gesamtheit der reellen und imaginären Elemente des Raumes oder der Desarguesschen Ebene gilt der Desarguessche Satz.

Beweis: Der Desarguessche Satz im Raume wurde in II 57 (S. 67) bloß auf Grund der Verknüpfungssätze bewiesen; da diese Grundsätze, nach 67 bis 74, auch nach Hinzunahme der imaginären Elemente gelten, bleibt der dort gegebene Beweis hierfür wörtlich gültig. Gilt für die reellen Elemente einer Ebene der Desarguessche Satz, so kann dieselbe als Schnitt eines Raumes aufgefaßt werden. In diesem gilt dann der Desarguessche Satz auch für die imaginären Elemente, also auch für die der Ebene.

76. Satz: Für die Gesamtheit der reellen und imaginären Elemente des Raumes gilt der Pascalsche Satz, wenn er für die reellen Elemente gilt.

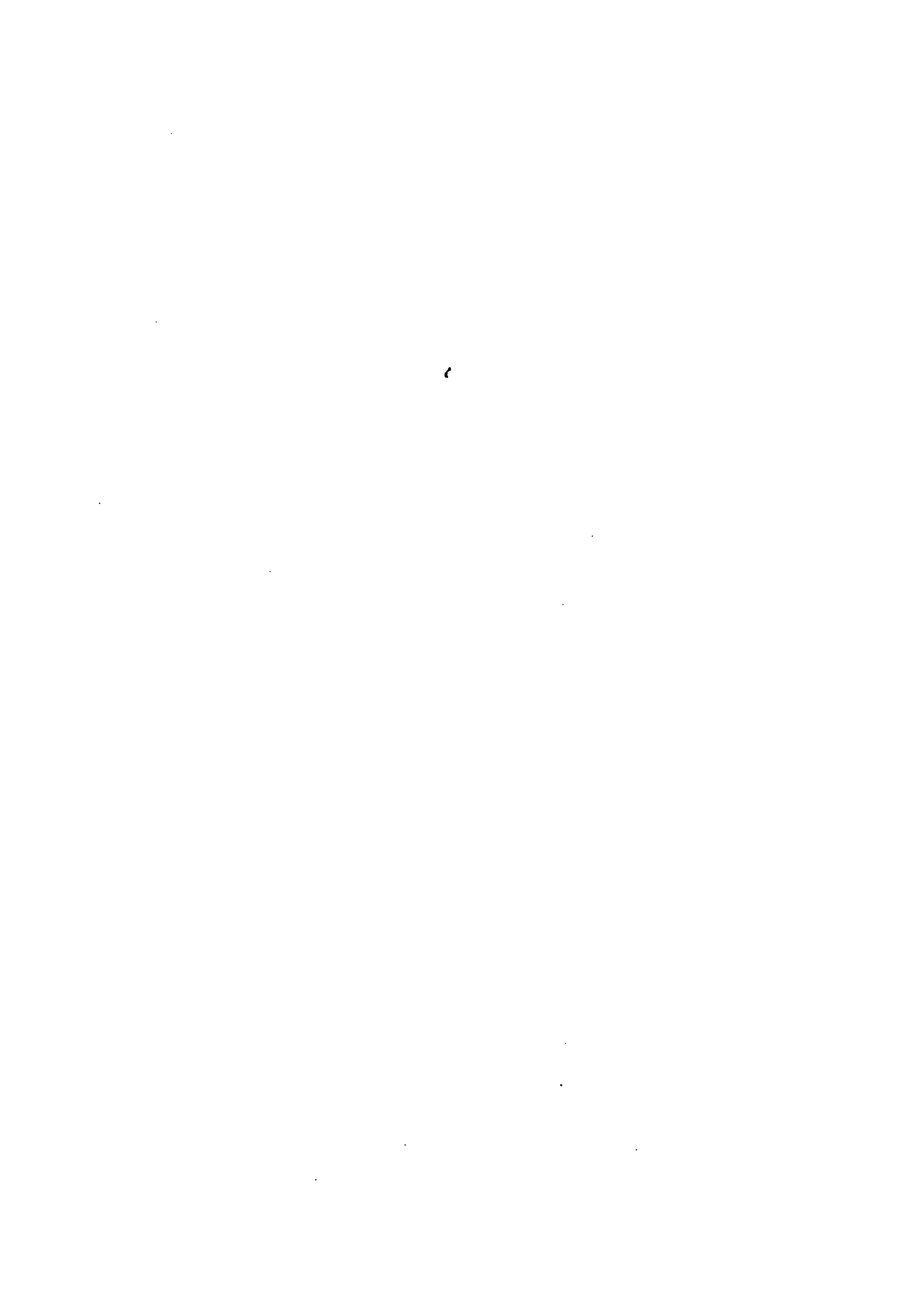
Beweis: Der Pascalsche Satz für nicht lauter reelle Elemente läßt sich immer als Schließungssatz für lauter reelle Elemente aussprechen, da jedes imaginäre Element durch ein Tripel reeller Elemente repräsentiert wird; und jeder Schließungssatz für reelle Elemente ist (II 138 S. 129) auf Grund des Pascalschen Satzes beweisbar.

77. Satz: Gilt für die reellen Elemente des Raumes oder der Desarguesschen Ebene der Pascalsche Satz, so gelten für die reellen und imaginären Elemente alle Schließungssätze.

Beweis folgt aus 75, 76 und II 138 (S. 129).

78. Im vorstehenden ist bewiesen worden, daß nach Einführung der imaginären Elemente alle Verknüpfungssätze unverändert ihre Gültigkeit behalten. Nicht dasselbe gilt für die Anordnungssätze. Vielmehr erkennt man, am einfachsten nach Einführung von Koordinaten, daß für die imaginären Punkte einer Geraden z. B. nicht mehr lineare, sondern planare Anordnung besteht (vgl. I 20 S. 10). Dasselbe kann man auf geometrischem Wege erkennen, indem man die imaginären Punkte einer reellen Geraden nach 59 durch ein Punkttripel OPQ mit festem Punkte O, also durch ein Punktpaar PQ repräsentiert und diese Paare vermittelst des Hesseschen*) Übertragungsprinzips den Punkten der Ebene zuordnet. Dann ergibt sich auch leicht, daß die für reelle Elemente geltenden linearen Grundsätze der relativen Dichte, der Meßbarkeit, der Stetigkeit entsprechende planare Sätze für die imaginären Elemente nach sich ziehen, daß also die Einführung der imaginären Elemente die Einführung keines neuen Grundsatzes erfordert. — Daß aber das System der reellen und imaginären Elemente keiner nochmaligen Erweiterung fähig ist, wenn man das Fortbestehen aller Verknüpfungssätze fordert, geht nach Einführung von Koordinaten aus I 153 (S. 51) hervor.

*) L. O. Hesse, Ein Übertragungsprinzip (Ges. Werke, München 1897, S. 531 ff. = Crelles Journal Bd. 66, 1866, p. 15 ff.).



IV.

Affine Geometrie.

Einleitung.

1. Mit dem Begriff der Geraden ist der Grundsatz: zwei verschiedene Punkte haben eine Verbindungsgerade, untrennbar verbunden. Denn wir erzeugten die Gerade als Punktmenge, indem wir zu den beiden gegebenen Punkten in bestimmter Weise weitere Punkte hinzunahmen. Sollte es sich als unmöglich herausstellen, in der vorgeschriebenen Weise weitere Punkte der Geraden anzugeben, so würde die Gerade lediglich aus den zwei gegebenen Punkten bestehen; aber der Grundsatz selbst bleibt hiervon unberührt. Nimmt man z. B. beliebig viele Punkte im Raume an, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und definiert jedes Punktpaar als Gerade, jedes Punkttripel als Ebene, so sind der angegebene Grundsatz und die übrigen Verbindungsgrundsätze erfüllt; aber jede Gerade hat nur zwei Punkte, jede Ebene nur drei Punkte, solange nicht das Bestehen der Schnittgrundsätze gefordert wird. Diese Schnittgrundsätze kamen auf den einen einzigen zurück:

Zwei verschiedene Geraden einer Ebene haben einen Schnittpunkt.

Dieser Grundsatz ist also nach dem vorhergehenden oder auch nach II 11 (S. 57) unabhängig von den Verbindungsgrundsätzen.

2. Etwas anderes ist die Frage, ob dieser Schnittgrundsatz als Erfahrungstatsache angesehen werden darf. Diese Frage ist zu verneinen. Denn wenn man auch meistens bemerkt, daß zwei verschiedene Geraden einer Ebene einen Schnittpunkt haben, so begegnet man doch auch ebenen Geradenpaaren, die sich nicht in der Zeichenebene schneiden, bei denen also über die Existenz oder Nichtexistenz eines Schnittpunktes nichts Bestimmtes ausgesagt werden kann. Demnach ist die bisher gemachte Annahme, daß ein solcher Schnittpunkt stets vorhanden ist, als Hypothese anzusehen, neben die sich gleichberechtigt die andere stellt: Es gibt ebene Geradenpaare ohne Schnittpunkt. Bei Annahme der ersten Hypothese besteht, wie wir in der projektiven Geometrie gesehen haben, ein vollkommener Dualismus für die Sätze des Verbindens und Schneidens, da ein solcher Dualismus be-

reits bei den Grundsätzen vorhanden ist. Die Annahme der zweiten Hypothese bezeichnet die nun zu behandelnde affine*) Geometrie, in der nur noch teilweiser Dualismus herrscht.

Uneigentliche Elemente und ihre Verknüpfungssätze.

3. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise, wenn wir von zwei sich nicht schneidenden Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ einer Ebene sagen, sie schneiden sich in einem „uneigentlichen“ Punkte, definiert durch das Geradenpaar ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$). Ebenso werden wir uneigentliche Geraden und Ebenen einführen. Die bisher betrachteten Punkte, Geraden und Ebenen sind also „eigentliche“. Demnach besteht, wie man der Erfahrung entnimmt, der folgende „Verknüpfungsgrundsatz der uneigentlichen Elemente“:

4. Grundsatz: Durch jeden eigentlichen Punkt gehen nur eigentliche Gerade und Ebenen. Dieser Grundsatz ist natürlich unabhängig von allen früheren, da man ja ganz willkürlich in einer gegebenen Geometrie bestimmte Elemente als uneigentliche bezeichnen kann. Setzt man z. B. fest, daß in einer Koordinatengeometrie der Punkt $O = (1000)$ und alle durch ihn gehenden Geraden und Ebenen, und nur diese, „uneigentlich“ heißen sollen, so geht durch jeden andern Punkt P eine uneigentliche Gerade $[OP]$ und ein Büschel von uneigentlichen Ebenen. Diese Geometrie ist dual zur Euklidischen.

5. Die Berechtigung, von uneigentlichen Punkten, Geraden, Ebenen zu sprechen, und zugleich die Zweckmäßigkeit dieser Ausdrucksweise wird sich ergeben, wenn wir nachweisen, daß man mit uneigentlichen Elementen genau wie mit eigentlichen alle Operationen des Verbindens und Schneidens ausführen kann, daß also im Gesamtgebiet der eigentlichen und der uneigentlichen Elemente die Verknüpfungsgrundsätze der projektiven Geometrie unverändert gültig bleiben. Diesen Nachweis führen wir im folgenden.

6. Satz: Ein eigentlicher Punkt P und ein uneigentlicher Punkt $Q = (\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ haben genau eine Verbindungsgerade.

Beweis: Liegt P nicht in $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$, so ist $[\{P\mathfrak{G}\}\ \{P\mathfrak{H}\}]$ die

*) Affin nennt zuerst Euler (Introductio in analysin infinitorum. Tomus II. Lausanne 1748. Caput XVIII art. 442 p. 239) eine projektive Verwandtschaft, bei welcher den unendlich fernen Punkten eben solche entsprechen. Die Gesamtheit der Eigenschaften affiner Figuren betrachtet als besonderes Gebiet der Geometrie zuerst Möbius (Der Baryzentrische Kalkul, Leipzig 1827, Kap. 3 = Ges. Werke I p. 177 ff., vgl. auch: Anhang zu „Beobachtungen auf der königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig usw.“, Leipzig 1823, p. 57 ff. = Möbius, Ges. Werke I p. 389 ff.

völlig bestimmte eigentliche Verbindungsgerade. Liegt P in $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$, O außerhalb beliebig, so ist $[\{[OP][OQ]\}\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}]$ die Verbindungsgerade, die nach 4 eigentlich ist.

7. Satz: Zwei uneigentliche Punkte $P=(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, $P_1=(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)$ haben genau eine Verbindungsgerade.

Beweis: Man ziehe (nach 6) von A auf $\mathfrak{G}$ die Gerade $[AP_1]=\mathfrak{G}'$, von B auf $\mathfrak{H}$ die Gerade $[BP_1]=\mathfrak{H}'$; ist jetzt $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\}\neq\{\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\}$, so ist $[\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\}\{\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\}]$ die Verbindungsgerade. Ist aber $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\}=\{\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\}$, so wähle man O außerhalb dieser Ebene, dann ist $[\{[OP][OP_1]\}\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}]$ die Verbindungsgerade.

Die Verbindungsgerade zweier uneigentlichen Punkte ergibt sich also als Schnittgerade zweier eigentlichen Ebenen. Dieselbe braucht nicht eigentlich zu sein, da der Satz: Zwei verschiedene Ebene schneiden sich in einer Geraden, nur auf Grund des hier nicht angenommenen Grundsatzes: Zwei verschiedene Geraden einer Ebene schneiden sich in einem Punkte, bewiesen worden ist.

8. Aufgabe: Auf einer uneigentlichen Geraden $[\mathsf{\Delta E}]$ uneigentliche Punkte anzugeben.

Lösung: Durch den eigentlichen Punkt A auf $\mathsf{\Delta}$ und den eigentlichen Punkt B auf E lege man die (eigentliche) Ebene $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$, welche $\mathsf{\Delta}$ in $\mathfrak{G}$, E in $\mathfrak{H}$ eigentlich schneidet. Durch A_1 in $\mathsf{\Delta}$, nicht auf $\mathfrak{G}$, ziehe man (nach 6) die Gerade $\mathfrak{G}_1$ nach $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$; dann ist $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1)$ ein Punkt von $[\mathsf{\Delta E}]$.

9. Aufgabe: Zu entscheiden, wann drei uneigentliche Punkte $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2)$ in einer Geraden liegen.

Lösung: Durch A auf $\mathfrak{G}$, durch B auf $\mathfrak{H}$ ziehe man (nach 6) die Geraden $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ nach $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{G}''$, $\mathfrak{H}''$ nach $(\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2)$. Dann liegen die drei Punkte in einer Geraden, wenn und nur wenn $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ in einer Ebene, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$ in einer Ebene liegen.

10. Aufgabe: Zu entscheiden, wann ein Punkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ auf einer Geraden $[\mathsf{\Delta E}]$ liegt.

Lösung: Man bestimme nach 8 zwei Punkte auf $[\mathsf{\Delta E}]$ und verfahre nach 9.

11. Satz: Ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt $P=(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ und eine eigentliche oder uneigentliche Gerade $[\mathsf{\Delta E}]$ haben genau eine Verbindungsebene, wenn $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ nicht auf $[\mathsf{\Delta E}]$ liegt.

Beweis: Liegt $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{H}$ in $\mathsf{\Delta}$ oder E, so ist $\mathsf{\Delta}$ oder E die Ebene $\{P[\mathsf{\Delta E}]\}$. Andernfalls lege man durch D in $\mathsf{\Delta}$ und E in E eine Ebene; diese gibt die eigentlichen Geraden $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ in $\mathsf{\Delta}$ und E, welche sich auf $[\mathsf{\Delta E}]$ schneiden. Dann ist (nach 6 oder 7) die Gerade $[P(\mathfrak{D}\mathfrak{E})]$ als Schnittgerade zweier eigentlichen Ebenen $[\mathsf{AB}]$ darstell-

bar. Bestimmt man ebenso eine zweite Gerade [A₁B₁] von P durch [ΔE], so ist {[AB] [A₁B₁]} die gesuchte Ebene, die auch uneigentlich sein kann.

12. Aufgabe: Auf einer uneigentlichen Ebene {[AB] [A₁B₁]} uneigentliche Punkte und Geraden anzugeben.

Lösung: Man kann nach 8 Punkte P auf [AB], P_1 auf [A₁B₁] finden; dann sind $[PP_1]$ Geraden der Ebene.

13. Satz: Drei Punkte, die nicht alle eigentlich sind und die nicht in einer Geraden liegen, haben genau eine Verbindungsebene.

Beweis: Man verbinde zwei der Punkte durch eine Gerade (6, 7) und verfahre dann nach 10.

14. Aufgabe: Zu entscheiden, ob vier Punkte $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)$, $(\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2)$, $(\mathfrak{G}_3\mathfrak{H}_3)$ in einer Ebene liegen, oder ob zwei Gerade:

$$[(\mathfrak{G}\mathfrak{H})(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)] = [\mathsf{AB}],\ [(\mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2)(\mathfrak{G}_3\mathfrak{H}_3)] = [\Gamma\Delta]$$

in einer Ebene liegen, oder ob vier eigentliche Ebenen A, B, Γ, Δ sich schneiden, oder ob drei eigentliche oder uneigentliche Geraden [ΔA], [ΔB], [ΔΓ] einer eigentlichen Ebene sich schneiden.

Lösung: Man untersuche nach 10, ob der Punkt ([ΔA] [ΔB]) auf [ΔΓ] liegt.

15. Aufgabe: Zu entscheiden, ob eine Gerade $\mathfrak{G}$ = [AB] in einer Ebene Γ liegt, oder ob drei Ebenen A, B, Γ durch eine Gerade gehen.

Lösung: Man wähle zwei Punkte auf $\mathfrak{G}$ (nach 8) und entscheide nach 14, ob sie in der Ebene liegen.

16. Satz: Eine eigentliche Gerade $\mathfrak{G}$ und eine eigentliche nicht durch $\mathfrak{G}$ gehende Ebene E haben genau einen Schnittpunkt, der auch uneigentlich sein kann.

Beweis: Ist A ein eigentlicher Punkt auf E, so ist $([\{A\mathfrak{G}\}\mathsf{E}]\mathfrak{G})$ der gesuchte Punkt.

17. Satz: Zwei verschiedene eigentliche oder uneigentliche Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ einer eigentlichen Ebene haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Man wähle einen eigentlichen Punkt O nicht in $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$; dann ist $([\{O\mathfrak{G}\}\ \{O\mathfrak{H}\}]\ \{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\})$ der Schnittpunkt, der eventuell nach 16 zu bestimmen ist.

18. Satz: Eine uneigentliche Gerade [ΓΔ] und eine nicht durch sie gehende eigentliche Ebene E haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Der Schnittpunkt ist ([EΓ] [EΔ]), also eventuell nach 17 zu bestimmen.

19. Satz: Eine eigentliche Gerade $\mathfrak{G} = [AB]$ und eine uneigentliche Ebene $\mathsf{E} = \{PQR\}$ haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Man bestimme nach 11 die eigentliche Ebene $\{P\mathfrak{G}\}$, nach 7 die uneigentliche Gerade $[QR]$, nach 18 den Schnittpunkt $S = (\{P\mathfrak{G}\}\,[QR])$, nach 7 die Gerade $[SP]$, nach 17 den Schnittpunkt $([SP]\mathfrak{G})$; dies ist der gesuchte.

20. Satz: Eine eigentliche Ebene A und eine uneigentliche Ebene $\{PQR\}$ haben genau eine Schnittgerade.

Beweis: Man bestimme nach 7 die Geraden $[PQ]$, $[PR]$, nach 18 die Punkte $(\mathsf{A}[PQ])$, $(\mathsf{A}[PR])$, nach 6 oder 7 die Gerade $[(\mathsf{A}[PQ])\,(\mathsf{A}[PR])]$; dies ist die gesuchte.

21. Satz: Eine uneigentliche Gerade $[\mathsf{AB}]$ und eine uneigentliche Ebene E haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Man bestimme nach 20 die Schnittgerade $[\mathsf{AE}]$, lege durch einen eigentlichen Punkt O die eigentliche Ebene $\{O[\mathsf{AE}]\} = \Delta$ (nach 11), dann ist der Schnittpunkt $([\mathsf{A}\Delta]\,[\mathsf{B}\Delta])$ nach 17 zu bestimmen.

22. Satz: Zwei verschiedene uneigentliche Ebenen E, Δ haben genau eine Schnittgerade.

Beweis: Es seien A, B eigentliche Ebenen; man bestimme nach 20 $[\mathsf{AE}]$, $[\mathsf{A}\Delta]$, $[\mathsf{BE}]$, $[\mathsf{B}\Delta]$, dann nach 17 die Punkte $([\mathsf{AE}]\,[\mathsf{A}\Delta])$, $([\mathsf{BE}]\,[\mathsf{B}\Delta])$, dann nach 7 die gesuchte Schnittgerade:

$$[([\mathsf{AE}]\,[\mathsf{A}\Delta])\,([\mathsf{BE}]\,[\mathsf{B}\Delta])].$$

23. Satz: Drei Ebenen A, B, Γ, die nicht durch eine Gerade gehen und die nicht alle drei eigentlich sind, haben genau einen Schnittpunkt.

Beweis: Man bestimme, eventuell nach 20 oder 22, die Schnittgerade $[\mathsf{B}\Gamma]$, dann nach 18 oder 19 oder 21 den gesuchten Schnittpunkt $(\mathsf{A}\,[\mathsf{B}\Gamma]) = (\mathsf{AB}\Gamma)$.

24. Damit ist die Gültigkeit der sämtlichen ebenen und räumlichen Verknüpfungsgrundsätze nachgewiesen. Für die Ebene allein erhält man dies Resultat, indem man alle eigentlichen Punkte P und Geraden $\mathfrak{G}$ derselben mit einem außerhalb derselben liegenden Punkte O verbindet. Dann wird auch jedem uneigentlichen Punkte $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ eine eigentliche Gerade von O, nämlich $[\{O\mathfrak{G}\}\,\{O\mathfrak{H}\}]$ und jeder uneigentlichen Geraden $[(\mathfrak{G}\mathfrak{H})\,(\mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1)]$ eine eigentliche Ebene von O, nämlich $\{[\{O\mathfrak{G}\}\,\{O\mathfrak{H}\}]\,[\{O\mathfrak{G}_1\}\,\{O\mathfrak{H}_1\}]\}$ zugeordnet, und das Bestehen der ebenen Verknüpfungssätze folgt aus dem Bestehen dieser Sätze im Bündel, welches ja nach 4 keine uneigentlichen Elemente enthält. Will man für die Geometrie der Ebene ohne Bezugnahme

auf den Raum, aber unter Voraussetzung des Desarguesschen Satzes, das Bestehen der Verknüpfungssätze für die uneigentlichen Elemente nachweisen, so hat man Folgendes zu beweisen:

Aus den Elementen: „eigentlichen Punkten A, B, C, D, ..., eigentlichen Geraden $\mathfrak{G} = [AB]$, $\mathfrak{H} = [CD]$, ..., eigentlichen und uneigentlichen Punkten $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')$, ..., eigentlichen und uneigentlichen Geraden $[(\mathfrak{G}\mathfrak{H})(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')]$, ...“, entstehen durch Anwendung der Verknüpfungssätze: „zwei Punkte bestimmen eine Gerade, zwei Gerade bestimmen einen Punkt, durch einen eigentlichen Punkt gehen nur eigentliche Gerade“, keine andern Elemente, als solche der angegebenen Arten. Demnach hätte man zunächst zu beweisen:

a) Ein eigentlicher und ein uneigentlicher Punkt bestimmen eine eigentliche Gerade; d. h. man kann auf ihr einen zweiten eigentlichen Punkt angeben.

Dieser Satz ist von den gegebenen unabhängig; man kann nämlich eine ebene Geometrie angeben, in der wohl die gegebenen Sätze, nicht aber Satz a) stattfindet. Betrachten wir in der gewöhnlichen ebenen Geometrie nur die Punkte (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten x, y als Punkte, und nur diejenigen als eigentliche, bei denen

$$0 \leqq x < k, \quad 0 \leqq y < k$$

für eine gegebene ganze Zahl k ist, so bestimmen in der Tat je zwei eigentliche Punkte eine Gerade, aber z. B. der eigentliche Punkt $(0, 0)$ und der uneigentliche Punkt $(1, k)$ bestimmen eine Gerade, die außer $(0, 0)$ keinen eigentlichen Punkt enthält, die also aus den eigentlichen Punkten durch Verbinden nicht konstruiert werden kann.

Demnach ist a) als Grundsatz anzunehmen.

Alsdann beweist man erstens:

b) Eine eigentliche Gerade $\mathfrak{P}$ und eine zweite eigentliche oder uneigentliche Gerade $[QR]$ schneiden sich in einem uneigentlichen Punkt; d. h. man kann eigentliche Geraden dieses Punktes angeben, z. B. ihn mit einem eigentlichen Punkt P verbinden.

Man ziehe nämlich durch die eigentlichen Punkte A und A_1 auf $\mathfrak{P}$ die Geraden $[AQ] = \mathfrak{G}$, $[A_1R] = \mathfrak{G}_1$, was wegen a) immer möglich sein soll; ferner durch einen beliebigen eigentlichen Punkt P, der nicht auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$ liegt, die Gerade $[PQ] = \mathfrak{H}$, ferner durch den beliebigen eigentlichen Punkt P_2 auf $\mathfrak{H}$ die Gerade $[P_2R] = \mathfrak{H}_1$. Dann verbinde man den eigentlichen Punkt A_1 mit $O = ([P_2A_2][PA])$, dem eigentlichen oder uneigentlichen Schnittpunkt zweier eigentlichen Geraden, durch eine Gerade $[A_1O]$; dann sei P_1 der eigentliche oder uneigentliche Schnittpunkt der beiden eigentlichen Geraden $[A_1O]$

und $\mathfrak{H}_1$. Schließlich ergibt sich der gesuchte Punkt als Schnittpunkt der beiden eigentlichen Geraden $\mathfrak{P}$ und $[PP_1]$; denn da $[PA]$, $[P_1A_1]$, $[P_2A_2]$ durch einen Punkt (O) gehen, so liegen Q, R, S auf einer Geraden.

Zweitens beweist man:

c) Eine eigentliche oder uneigentliche Gerade $\mathfrak{P}$ und eine zweite eigentliche oder uneigentliche Gerade $[QR]$ schneiden sich in einem Punkte.

Man wähle einen eigentlichen Punkt A_2, ziehe (nach a) die eigentlichen Geraden $[A_2Q] = \mathfrak{G}$, $[A_2R] = \mathfrak{G}_1$, bestimme (nach b) die uneigentlichen Schnittpunkte $A = (\mathfrak{P}\mathfrak{G})$, $A_1 = (\mathfrak{P}\mathfrak{G}_1)$, ziehe die eigentliche Gerade $[PQ] = \mathfrak{H}$, durch einen eigentlichen Punkt P_2 derselben die eigentliche Gerade $[P_2R] = \mathfrak{H}_1$, bestimme den Schnittpunkt $O = ([AP][A_2P_2])$, dann (nach b) den Schnittpunkt $P_1 = ([OA_1]\mathfrak{H}_1)$, schließlich den Schnittpunkt $S = (\mathfrak{P}[QR]) = (\mathfrak{P}_1[PP_1])$ (nach b).

Damit ist gezeigt, daß man durch Schneiden zweier eigentlichen oder uneigentlichen Geraden stets wieder einen Punkt enthält, der als Schnittpunkt zweier eigentlichen Geraden aufgefaßt werden kann. Andererseits ergeben sich nach Voraussetzung durch Verbinden zweier eigentlichen Punkte eine eigentliche, durch Verbinden zweier uneigentlichen Punkte $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, $(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')$ eine Gerade $[(\mathfrak{G}\mathfrak{H})(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}')]$ und nach a) durch Verbinden eines eigentlichen und eines uneigentlichen Punktes eine eigentliche Gerade, also allgemein durch Verbinden und Schneiden aus den angegebenen eigentlichen und uneigentlichen Elementen nur Elemente derselben Art; was zu beweisen war.

Die Anordnungssätze der uneigentlichen Elemente.

Daß die eigentlichen und uneigentlichen Punkte einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden denselben Anordnungsgesetzen unterliegen, die wir vor Unterscheidung der eigentlichen und uneigentlichen Punkte aufgestellt hatten, ergibt sich ohne weiteres daraus, daß dieselben den durch sie gehenden Geraden eines Büschels eindeutig zugeordnet werden können; und diese sind nach 4 alle eigentlich, werden also in ihrer Anordnung von der Einführung der uneigentlichen Elemente nicht berührt. Aber es gilt für die Ordnungsbeziehungen der eigentlichen und uneigentlichen Punkte ein neuer Grundsatz, der „Anordnungsgrundsatz der uneigentlichen Punkte“.

25. Grundsatz: Zwei eigentliche und zwei uneigentliche Punkte einer Geraden trennen sich nicht.

Man entnimmt diesen Grundsatz der Erfahrung. In der Tat, sind A, B zwei eigentliche, $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ ein uneigentlicher Punkt auf der

Geraden $\mathfrak{G}$, O ein Punkt auf $\mathfrak{H}$, so schneidet jede von $\mathfrak{H}$ durch $[OA]$, $[OB]$ getrennte Gerade die Gerade $\mathfrak{G}$ in einem eigentlichen Punkte.

Dieser Grundsatz ist von allen vorhergehenden einschließlich 4 unabhängig, da man z. B. in einer Koordinatengeometrie die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten als eigentliche, die übrigen als uneigentliche bezeichnen kann.

26. Definition: Sind A, B, C eigentliche, U ein uneigentlicher Punkt einer Geraden, und ist AC getrennt durch BU, so heißt B, jede durch ihn (und nicht durch A) gehende Gerade und Ebene, „zwischen" A und C. Diese Definition ist zulässig, denn ist V irgend ein anderer uneigentlicher Punkt der Geraden, und besteht z. B. die Reihenfolge $ACUV$, so folgt aus dieser und $ABCU$ nach III 14 p. 147 stets $ABCV$, so daß die Definition von „zwischen" unabhängig ist von der Wahl des uneigentlichen Punktes.

27. Satz: Von drei Punkten A, B, C einer Geraden liegt einer und nur einer zwischen den beiden anderen.

Beweis: Ist U irgend ein uneigentlicher Punkt der Geraden, so lassen sich nach III 3 p. 141 die vier Punkte A, B, C, U nur auf eine Art in zwei sich trennende Paare, z. B. AC, BU, teilen; dann liegt B zwischen A und C.

28. Satz: Gibt es einen uneigentlichen Punkt U auf einer Geraden, so liegt zwischen zwei eigentlichen Punkten desselben stets ein Punkt, also auch Punkte, Gerade und Ebenen.

Beweis: Zwischen A und B liegt der vierte harmonische C von U in bezug auf AB.

29. Satz: Liegt in der Ebene $\{ABC\}$ wenigstens eine uneigentliche Gerade $\mathfrak{H}$ und die eigentliche, nicht durch die eigentlichen Punkte A, B, C gehende Gerade $\mathfrak{G}$, so finden von den drei Aussagen

$\mathfrak{G}$ zwischen B, C
$\mathfrak{G}$ „ C, A
$\mathfrak{G}$ „ A, B

entweder zwei oder keine statt.

Beweis: Schneidet $\mathfrak{H}$ die drei Geraden $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ resp. in den uneigentlichen Punkten U, V, W, und $\mathfrak{G}$ in den Punkten P, Q, R, so finden nach III 7 p. 145 von den drei Aussagen

P, U getrennt durch B, C
Q, V „ „ C, A
R, W „ „ A, B

entweder zwei oder keine statt; daraus folgt nach 26 die Behauptung.

30. Satz: Liegt im Raume $|ABCD|$ wenigstens eine uneigentliche Ebene Δ und die eigentliche nicht durch die eigentlichen Punkte A, B, C, D gehende Ebene E, so finden von den sechs Aussagen:

E zwischen AB, AC, AD, BC, BD, CD, entweder keine statt, oder drei solche, wie E zwischen AB, AC, AD, oder vier solche, wie E zwischen AB, BC, CD, DA.

Beweis folgt aus 29.

31. Definition: Die eigentlichen Punkte einer Geraden (einer Ebene, eines Raumes), in der ein uneigentlicher Punkt (Gerade, Ebene) liegt, zerfallen durch einen eigentlichen Punkt A (Gerade 𝔊, Ebene E) in zwei Klassen, so daß A (resp. 𝔊, resp. E) zwischen je zwei Punkten verschiedener Klassen liegt; die Gesamtheit der Punkte einer Klasse heißt „Halbgerade" (Halbebene, Halbraum).

32. In bezug auf die Existenz uneigentlicher Punkte kann eine eigentliche Gerade von dreierlei Art sein. Eine eigentliche Gerade kann nämlich erstens keinen, zweitens genau einen, drittens mehr als einen uneigentlichen Punkt enthalten. Es besteht nunmehr der Satz:

33. Satz: Der Raum enthält nur eigentliche Geraden von einer der drei Arten.

Dieser Satz ist jedoch nicht auf Grund der bisher aufgestellten Grundsätze zu beweisen; man kann vielmehr eine Geometrie angeben, in welcher Geraden von allen drei Arten vorkommen und in der alle bisherigen Grundsätze erfüllt sind. Zu diesem Zweck betrachte man in der gewöhnlichen Geometrie die Punkte im Innern und auf der Oberfläche eines gewöhnlichen konvexen Polyeders als uneigentlich, alle übrigen als eigentlich. In dieser Geometrie sind offenbar alle Grundsätze der Verknüpfung und Anordnung, insbesondere auch die beiden neueingeführten Grundsätze 4 und 25 erfüllt, aber dieselbe enthält beliebig viele Gerade, die keinen uneigentlichen Punkt enthalten, nämlich diejenigen, welche das Polyeder weder schneiden noch berühren; ferner enthält dieselbe unendlich viele Geraden, welche genau einen uneigentlichen Punkt enthalten, nämlich diejenigen Geraden, welche dasselbe in einer Ecke oder Kante berühren; schließlich enthält diese Geometrie unendlich viele Geraden, welche mehr als einen uneigentlichen Punkt enthalten, nämlich diejenigen, von welchen eine Strecke im Innern oder auf der Oberfläche des Polyeders liegt.

Es bedarf daher zum Beweise des Satzes 33 der Neueinführung eines Grundsatzes, der von neuem durch Zurückgreifen auf die Erfahrung gewonnen werden muß. Um diesen Grundsatz aussprechen zu können, müssen wir folgende Definition vorausschicken:

34. Definition: Eine Kollinearität, in welcher den eigentlichen

Punkten stets eigentliche, den uneigentlichen uneigentliche entsprechen, heißt eine „Affinität".

Beobachtet man nun die Bewegung eines sogenannten starren Körpers, so bemerkt man erstens: Vier beliebige Punkte des Körpers, die in keiner Ebene liegen, gehen durch die Bewegung in vier Punkte über, die ebenfalls in keiner Ebene liegen; zweitens: zwei sich schneidende Gerade des Körpers gehen durch die Bewegung in zwei sich schneidende Geraden über. Die erste Eigenschaft der Bewegung charakterisiert dieselbe als Kollinearität; in der Tat, ordnet man den fünf beliebigen Punkten A_0, A_1, A_2, A_3, E des Körpers, von denen keine vier in einer Ebene liegen, diejenigen fünf Punkte zu $\bar{A}_0$, $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$, $\bar{E}$, in welche dieselben durch die Bewegung übergehen, alsdann den Punkten P_h auf $[A_0 A_h]$ die Punkte $\bar{P}_h$ auf $[\bar{A}_0 \bar{A}_h]$, so daß

$$(P_h E_h A_0 A_h) = (\bar{P}_h \bar{E}_h \bar{A}_0 \bar{A}_h) \qquad (h = 1, 2, 3)$$

ist, schließlich dem Punkte (nicht in $\{A_0 A_1 A_2\}$)

$$P = (\{P_0 A_1 A_2\}\, \{P_1 A_2 A_0\}\, \{P_2 A_0 A_1\})$$

den Punkt

$$\bar{P} = (\{\bar{P}_0 \bar{A}_1 \bar{A}_2\}\, \{\bar{P}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_0\}\, \{\bar{P}_2 \bar{A}_0 \bar{A}_1\}),$$

und analog für die in $\{A_0 A_1 A_2\}$ gelegenen Punkte, so wird hierdurch eine Kollinearität im Raume hergestellt, in welcher jedem Punkte P des Körpers der ihm durch die Bewegung entsprechende Punkt des Körpers zugeordnet ist.

Der zweiten Eigenschaft zufolge geht durch die Bewegung jeder eigentliche Punkt in einen eigentlichen Punkt, also, durch Betrachtung der umgekehrten Bewegung, jeder uneigentliche Punkt in einen uneigentlichen über, d. h. die Bewegung ist eine Affinität.

Nimmt man drittens noch hinzu, daß man z. B. ein Lineal, d. h. einen Körper, dessen Oberfläche eine Ebene und in ihr eine geradlinige Kante enthält, in einer beliebigen Ebene an eine beliebige Gerade beliebig anlegen kann, so erhält man, aus der Tatsache der Bewegung abgeleitet, den Grundsatz:

35. Grundsatz: Es gibt Affinitäten, in denen eine beliebig gegebene Gerade 𝔊 einer beliebig gegebenen Geraden 𝔋, einem beliebig gegebenen Punkte von 𝔊 ein beliebig gegebener Punkt von 𝔋, einer beliebig gegebenen Ebene von 𝔊 eine beliebig gegebene Ebene von 𝔋 entspricht.

Mit diesem Grundsatz ist natürlich nicht der volle geometrische Inhalt der Bewegung starrer Körper erschöpft; er repräsentiert vielmehr nur den „graphischen" Teil desselben, zu welchem später noch der „metrische" hinzutritt. Aber dieser Grundsatz genügt, um den

Satz 33 zu beweisen. Betrachtet man nämlich zwei Gerade $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, so existiert nach 35 eine Affinität, welche $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ überführt, in welcher also jedem uneigentlichen Punkt von $\mathfrak{G}$ ein uneigentlicher Punkt von $\mathfrak{H}$ und umgekehrt entspricht. Demnach enthalten beide Gerade gleichzeitig keinen, einen oder mehr als einen uneigentlichen Punkt.

Demnach hat man außer der Geometrie ohne uneigentliche Punkte (projektive Geometrie) zwei „affine“ Geometrien zu unterscheiden: erstens die „Euklidische“, in welcher jede eigentliche Gerade genau einen uneigentlichen Punkt enthält: zweitens die „Nicht-Euklidische“ von Bolyai und Lobatschefsky, in welcher jede eigentliche Gerade mehrere uneigentliche Punkte enthält.

Euklidische affine Geometrie.

Für diese ist nach vorhergehendem der Grundsatz charakteristisch:

36. Grundsatz: Auf jeder eigentlichen Geraden liegt genau ein uneigentlicher Punkt; also in jeder Ebene genau eine uneigentliche Gerade, im Raume genau eine uneigentliche Ebene.

D. h. wenn wir jetzt die Ausdrucksweise „uneigentlicher Punkt“ fallen lassen und zur ursprünglichen Bedeutung derselben zurückkehren:

Zu jeder Geraden $\mathfrak{G}$ gibt es durch einen Punkt P außerhalb derselben in der Ebene $\{P\mathfrak{G}\}$ genau eine parallele ($||$) (s. Def. 37) Gerade. (Euklidisches Parallelen-Axiom.)

Mit Rücksicht auf 33 kann dieser Grundsatz durch den spezielleren ersetzt werden:

Zu einer bestimmten Geraden $\mathfrak{G}$ gibt es durch einen bestimmten Punkt P außerhalb derselben in der Ebene $\{P\mathfrak{G}\}$ genau eine parallele Gerade.

Daß durch Annahme dieses Grundsatzes weder der Desarguessche Satz in der Ebene, noch der Pascalsche Satz aus den Verknüpfungs- und den reinen Anordnungssätzen allein beweisbar werden, ist evident, da sich diese Geometrie von der projektiven nur durch die Bezeichnung bestimmter Elemente als „uneigentlicher“ unterscheidet.

37. Definition: Zwei sich nicht schneidende Geraden einer Ebene heißen parallel ($||$); ebenso zwei sich nichtschneidende Ebenen oder eine Ebene und eine sie nicht schneidende Gerade. Zu den Elementarkonstruktionen des Verbindens und Schneidens tritt nunmehr noch die des Parallelenziehens, d. h. des Verbindens eigentlicher und uneigentlicher Punkte.

38. Satz: Sind zwei Gerade $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ einer dritten $\mathfrak{G}$ parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis: Man lege durch $\mathfrak{G}_1$ und P auf $\mathfrak{G}_2$ die Ebene $\{P\mathfrak{G}_1\} = \mathsf{E}$. Diese schneidet die Ebene $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2\}$ in einem Punkte P, also in einer Geraden $\mathfrak{G}'$ durch P. Existierte ein Punkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}')$ auf $\mathfrak{G}$, so gingen durch ihn die Ebenen $\{P\mathfrak{G}_1\}$ und $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\}$, also auch ihre Schnittgerade $\mathfrak{G}_1$, gegen die Annahme, daß $\mathfrak{G} \quad \mathfrak{G}_1$. Existiert kein Schnittpunkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}')$, so muß $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}'$ sein, da sonst durch P zwei Parallele zu $\mathfrak{G}$ existierten, d. h. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ liegen in einer Ebene. Schnitten sich nun $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ in einem Punkte, so gingen durch diesen zwei Parallele zu $\mathfrak{G}$, gegen 36. Demnach schneiden sich $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ nicht, liegen aber in einer Ebene, d. h. sie sind parallel.

39. Definition: Eine Affinität, in welcher jeder uneigentliche Punkt und kein eigentlicher Punkt sich selbst entspricht, heißt eine „Schiebung".

40. Satz: Es gibt Schiebungen, und entsprechen den Punkten A, B in einer Schiebung die Punkte A', B', so sind entweder die Geraden $[AA']$, $[BB']$ koinzident oder parallel, und im letzteren Fall $[AB] \quad [A'B']$.

Beweis: Die Existenz der Schiebungen folgt entweder aus der der entsprechenden Projektivitäten, oder wie folgt. Sind A, $A'\,(\neq A)$, B nicht auf $[AA']$ gegeben, so findet man B' als Schnittpunkt von $[BB'] \quad [AA']$ und $[A'B'] \quad [AB]$. Durch zweimalige Anwendung dieser Konstruktion wird auch zu jedem Punkte B auf $[AA']$ der entsprechende B' gefunden. Daß diese Konstruktionen eine Kollinearität definieren, folgt so: Liegen A, B, C auf $[AA']$, dann auch A', B', C'. Liegen aber A, B, C in einer von $[AA']$ verschiedenen Geraden, so folgt aus $[A'B'] \quad [AB] = [AC] \quad [AC']$, daß $[A'B'] = [A'C']$ ist. Kein eigentlicher Punkt P geht in sich über; denn wäre $P' = P$, dann auch $[P'A'] = [PA]$, also $A = A'$, d. h. die Schiebung wäre die Identität. Kein uneigentlicher Punkt geht nicht in sich über; denn geht die Gerade $[AA'U]$ in $[A'A''U']$ über, so muß sowohl $[AA']$ wie $[A'A''] \quad [BB']$, also $[AA'] = [A'A'']$ sein. Daß aber die angegebene Konstruktion widerspruchslos und eindeutig möglich ist, folgt aus den folgenden Sätzen.

41. Definition: Ein Punktpaar A, A' heißt ein „Vektor"*). Zwei Vektoren AA', BB' zweier Geraden heißen gleich, wenn

$$[AA'] \quad [BB'], \qquad [AB] \quad [A'B']$$

ist. Diese Definition ist zulässig, da der Satz besteht:

42. Satz: Sind zwei Vektoren zweier Geraden einem Vektor einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.

---

*) Hamilton, Elemente der Quaternionen, deutsch von Glan (Leipzig 1882) I p. 3.

Beweis: Es sei $AA' = BB'$, $AA' = CC'$, d. h.

$$[AA'] \parallel [BB'], \quad [AA'] \parallel [CC'], \quad [AB] \parallel [A'B'], \quad [AC] \parallel [A'C'].$$

Dann folgt zunächst nach 36, daß auch $[BB'] \parallel [CC']$. Ferner durch Anwendung des Desarguesschen Satzes, der ja nach 5 bis 24 auch mit Einschluß der uneigentlichen Elemente gilt, da $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ durch einen (uneigentlichen) Punkt gehen, daß der Punkt ($[BC]$, $[B'C']$) auf der (uneigentlichen) Geraden der Punkte ($[AB]$, $[A'B']$), ($[AC]$, $[A'C']$) liegt, d. h. uneigentlich ist, d. h. $[BC] \parallel [B'C']$.

43. Satz: Zu jedem Vektor AA' gibt es einen bestimmten gleichen Vektor BB', wenn B beliebig, nicht auf $[AA']$ gegeben ist.

Beweis: Man ziehe durch B die Parallele zu $[AA']$, durch A' die Parallele zu $[AB]$; der Schnittpunkt beider ist der Punkt B'. Ein solcher Schnittpunkt ist stets vorhanden, denn sonst gäbe es durch A' zwei Parallelen $[A'A]$, $[A'B']$ zu der durch B gezogenen Parallele zu $[AA']$; diese müßten zusammenfallen, also $[AA'] \parallel [AB]$ sein, während diese Geraden doch einen Schnittpunkt A haben.

44. Definition: Zwei Vektoren einer Geraden heißen gleich, wenn sie nach 41 einem Vektor einer anderen Geraden gleich sind. Diese Definition ist zulässig, da jetzt allgemein der Satz besteht:

45. Satz: Sind zwei Vektoren einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis: Es soll aus den Vektorengleichheiten $a = b$, $a = c$ stets $b = c$ geschlossen werden, wenn die Gleichungen im Sinne von 41 oder 44 gelten. Es sei erstens

$$a = b \text{ nach } 41$$
$$a = c \text{ nach } 41,$$

so folgt $b = c$ nach 42, falls nicht b, c auf derselben Geraden liegen; in diesem Fall folgt $b = c$ nach 44. Es sei zweitens

$$a = b \text{ nach } 41$$
$$a = c \text{ nach } 44,$$

d. h. es existiert a' so, daß

$$a = a' \text{ nach } 41$$
$$a' = c \text{ nach } 41.$$

Dann folgt (42) zuerst $b = a'$, dann $b = c$, falls nicht a', b auf einer Geraden liegen; in diesem Fall kann man (nach 43) a' durch a'' ersetzen, so daß

$$a' = a''$$

und a' nicht auf der Geraden $[b]$ oder $[a]$ liegt. Dann folgt (42) zunächst

$$a = a''$$
$$c = a'',$$

dann $b = a''$ und schließlich $b = c$.

Es sei drittens

$$a = b \text{ nach } 44$$
$$a = c \text{ nach } 44,$$

d. h. es existieren a', a'', so daß $a = a'$, $b = a'$, $a = a''$, $c = a''$ nach 41. Daraus folgt (42) erst $a' = a''$, dann $b = a''$, schließlich $b = c$, wenn nicht a', a'' auf einer Geraden liegen. In diesem Fall bestimme man nach 43 auf einer von $[a]$ und $[a']$ verschiedenen Geraden $a''' = a'$, dann folgt (42) erst $a = a'''$, $b = a'''$, dann $a'' = a'''$, dann $b = a''$, schließlich $b = c$.

46. Satz: Zu jedem Vektor AA' gibt es einen bestimmten gleichen Vektor BB', wenn B beliebig auf $[AA']$ gegeben ist.

Beweis folgt aus 45 und zweimaliger Anwendung von 43.

47. Definition: Durch die Sätze 41 bis 46 ist Satz 40 bewiesen und es kann jetzt jede Schiebung, in welcher A dem A' entspricht, durch den Vektor AA' repräsentiert werden. Beliebige Figuren und Affinitäten heißen parallel, wenn sie sich nur durch eine Schiebung unterscheiden.

48. Satz: Ist $AB = BC = FD$, nicht auf $[AB]$, und

$$E = ([AF] | [CD]),$$

so gehen $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ durch einen Punkt.

Beweis: Aus $FD = AB$ folgt $[FD] \| [AB]$, $[AF] \| [BD]$, und aus $FD = BC$ folgt noch $[FB] \| [DC]$. Demnach schneiden sich von den beiden Dreiecken ACE, BDF die entsprechenden Seiten auf einer (uneigentlichen) Geraden, also gehen nach dem Desarguesschen Satze $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ durch einen Punkt.

Zusatz: Es ist auch $AF = BD = FE$ und $CD = BF = DE$.

49. Definition: Ist $AB = BC$, so heißt B der Mittelpunkt des Vektors AC. Derselbe kann nach 48 als der vierte harmonische Punkt zu A, C und dem uneigentlichen Punkt von $[AC]$ angesehen werden. Er ist eindeutig bestimmt (s. 53).

50. Satz: Ist $AB = A'B'$, $[AC]$ parallel oder koinzierend $[A'C']$, $[BC]$ parallel oder koinzidierend $[B'C']$, so ist auch $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Beweis: Liegen erstens AB, $A'B'$ auf verschiedenen Geraden und ist $[AC] \| [A'C']$, $[BC] \| [B'C']$, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auf einer (un-

eigentlichen) Geraden, demnach gehen $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ durch einen Punkt, der aber wegen $[AA'] \| [BB']$ uneigentlich ist; demnach ist auch $[AA'] \| [BB'] \| [CC']$, also $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Jeder der anderen Fälle wird durch zweimalige Anwendung des Vorstehenden bewiesen, indem man A'' nicht auf $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'A']$ wählt und $A''B'' = AB$, $[A''C''] \| [AC]$, $[B''C''] \| [BC]$ zieht. Der Schnittpunkt C'' ist vorhanden, denn sonst wäre $[AC] \| [A''C''] \| [B''C''] \| [BC]$, was nur für C in $[AB]$ möglich wäre; das war ausgeschlossen.

51. Satz: Ist $AB = A'B'$, $[AA_1] \| [BB_1] \| [A'A_1'] \| [B'B_1']$, $[A_1B_1] \| [A_1'B_1']$, so ist $A_1B_1 = A_1'B_1'$.

Beweis: Sei $B_1C = A_1A$, $B_1'C' = A_1'A'$, so folgt $A_1B_1 = AC$, $A_1'B_1' = A'C'$, $AC = A'C'$ (50), also $A_1B_1 = A_1'B_1'$.

52. Satz: Ist $AB = BC$, $AB' = B'C'$, so ist $[BB'] \| [CC']$.

Beweis: Sei A_0 nicht auf $[AB]$ oder $[AB']$, aber in $\{BAB'\}$, $A_0B_0 = AB$, $A_0B_0' = AB'$, $A_1 = ([AA_0][CB_0])$, $A_1' = ([AA_0][C'B_0'])$, so ist $AA_0 = A_0A_1$ und $= A_0A_1'$, also (46) $A_1 = A_1'$, so gibt der Desarguessche Satz aus den beiden Dreiecken A_0BB', A_1CC', daß $[CC'] \| [BB']$ ist.

53. Aufgabe: Den Mittelpunkt eines Vektors AC zu konstruieren.

Lösung: Man nehme F nicht auf $[AC]$, mache $AF = FE$, (46) $[FB] \| [EC]$, B auf $[AC]$. B existiert, denn sonst wäre

$$[AC] \| [FB] \| [EC],$$

also $[AC] = [EC]$, also F auf $[AC]$, gegen die Annahme. Es ist $AB = BC$ nach 51; B ist eindeutig bestimmt, denn wäre auch $AB_1 = B_1C$, so wäre (52) auch $[FB_1] \| [EC]$, also gäbe es durch F zwei Parallelen zu $[EC]$; gegen 36.

54. Satz: Ist $AM = MB'$, $[AB] \| [A'B']$, $A'MB$ in einer Geraden, so ist $BM = MA'$. Umgekehrt, ist $AM = MB'$, $BM = MA'$, so ist $[AB] \| [A'B']$.

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus 50, die Umkehrung folgendermaßen. Sei $AM = MB'$, $[B'A_1] \| [AB]$, A_1 auf MB, so ist nach vorhergehendem $BM = MA_1$ und nach Voraussetzung $= MA'$, also $A_1 = A'$, d. h. $[B'A'] \| [AB]$.

55. Satz: Ist $AB = A'B'$, so ist $AA' = BB'$.

Beweis: Liegen beide Vektoren auf verschiedenen Geraden, so folgt die Behauptung sofort aus der Definition 41. Liegen sie auf derselben Geraden, so wähle man außerhalb derselben $A''B'' = AB$, $A''A''' = AA'$. Wegen $A'B' = A''B''$ schneiden sich $[A'B'']$, $[B'A'']$

in ihrem Mittelpunkte (54); ebenso schneiden sich, wegen $BA' = B''A'''$, $[BA''']$ und $[A'B'']$ in ihren Mittelpunkten, also schneiden sich $[BA''']$, $[B'A'']$ in ihren Mittelpunkten, also (54) ist $[A''B] \parallel [A'''B']$, also $A''A''' = BB'$, also $AA' = BB'$.

56. Satz: Die Vektoren oder Schiebungen bilden eine Gruppe, d. h. es besteht für dieselbe eine Komposition derart, daß gleiche Vektoren sich zu gleichen Vektoren komponieren.

Beweis: Man definiere AC als die Summe der Vektoren AB und BC, in Zeichen $AB + BC = AC$*). Ist nun $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, so ist auch $AC = A'C'$, denn aus $AB = A'B'$ folgt (55) $AA' = BB'$, aus $BC = B'C'$ folgt $BB' = CC'$, aus $AA' = BB'$, $BB' = CC'$ folgt (45) $AA' = CC'$ und daraus $AC = A'C'$, was zu beweisen war.

Zusatz: Ebenso folgt aus $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ stets $BC = B'C'$.

57. Satz: Für die Komposition der Vektoren gilt das assoziative Gesetz.

Beweis: Es ist

$$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD$$

und

$$AB + (BC + CD) = AB + BD = AD.$$

58. Satz: Für die Komposition der Vektoren gilt das kommutative Gesetz.

Beweis: Sei $AB' = BC$ (43, 46), so ist (55) $AB = B'C$, also wird

$$AB + BC = AC = AB' + B'C = BC + AB.$$

59. Satz: Alle Vektoren AA sind als einander gleich zu betrachten und gleich Null zu setzen, da sie das Kompositionsresultat ungeändert lassen; und keine anderen Vektoren haben diese Eigenschaft. Aus $AB + BC = AB + BD$ folgt $BC = BD$. Es ist $AB = -BA$ zu setzen. (Die Schiebung AA ist die „Identität“.)

Beweis: Es ist

$$AA = AB + BA = BA + AB = BB.$$

Es ist

$$AB + BB = AB.$$

Ist $AB + BC = AB$, also $AC = AB$, und wäre $DE = AB$ und $DE = AC$, DE nicht auf $[AB]$, so folgte $[EB] \parallel [DA]$, $[EC] \parallel [DA]$

*) Caspar Wessel, Essai sur la représentation analytique de la direction, Kopenhagen 1799. 1897; Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806.

gegen 36, falls nicht $[EB] = [EC]$, also $B = C$ ist. — Aus $AB + BC = AB + BD$ folgt $AC = AD$, also $C = D$, also $BC = BD$. Es ist $AB + BA = 0$, also (I 48 p. 17) $BA = - AB$ zu setzen.

60. Bezeichnung: Ist $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$, so setzt man $A_0A_k = k \cdot A_0A_1$ und $A_0A_1 = \frac{1}{k} \cdot A_0A_k$, also

$$A_0A_h = h \cdot A_0A_1 = \frac{h}{k} \cdot A_0A_k.$$

61. Aufgabe: Wenn A_0A_1 gegeben ist, so soll $\frac{h}{k} A_0A_1 = A_0C$ konstruiert werden.

Lösung: Es sei A' nicht auf $[A_0A_1]$ und man mache

$$A_0A' = A'A'' = A''A''' = \cdots = A^{(k-1)}A^{(k)} = \cdots;$$

dann

$$A'B' \parallel A''B'' \parallel A'''B''' \cdots \parallel A^{(k)}A_1,$$
$$B', B'', \ldots \text{ auf } [A_0A_1];$$

so ist nach 50:

$$A_0B' = B'B'' = B''B''' = B'''B'''' \text{ usw.} = B^{(k-1)}A_1,$$

also (60)

$$A_0A_1 = k \cdot A_0B', \; A_0B' = \frac{1}{k} A_0A_1;$$

ferner ist (60)

$$A_0B^{(h)} = h \cdot A_0B' = \frac{h}{k} A_0A_1.$$

62. Satz: Ist S ein gegebener eigentlicher Punkt und ordnet man jedem Punkte P den Punkt P' so zu, daß $PS = SP'$ ist, so entsteht eine Affinität.

Beweis: Die angegebene Verwandtschaft kann (nach 49) als Harmonie in bezug auf S und die uneigentliche Ebene aufgefaßt werden; oder man folgert die Behauptung so: Liegen A, B, C in einer Geraden, so ist Vektor

$$AB = AS + SB = SA' + B'S = B'S + SA' = B'A',$$

also $[AB] \parallel [A'B']$, ebenso $[AC] \parallel [A'C']$, also $[A'B'] = [A'C']$ oder A', B', C' in einer Geraden.

63. Definition: Eine Affinität der in 62 betrachteten Art heißt „Spiegelung“ am Punkte S, dem „Spiegelungszentrum“; dieselbe kann durch den Punkt S repräsentiert werden.

64. Definition: Unter der Summe $A + B$ zweier Spiegelungen A und B soll die Spiegelung am Mittelpunkte M von AB verstanden

werden.*) Demnach findet die Spiegelungsgleichung $A + B = C + D$ statt, wenn die Vektoren AC und DB gleich sind. Für $C = D = M$ erhält man $A + B = 2M$ als Beziehung zwischen den Spiegelungen A, B, M. Man hat also zwar nicht $A + A = A$ zu setzen, wohl aber stimmen die durch $A + A$ und A repräsentierten Spiegelungen überein. Durch $2M - A = B$ wird die aus A und M abzuleitende Spiegelung B erklärt. Jedes Punktaggregat $\alpha A + \beta B + \gamma C + \cdots$ mit positiven oder negativen ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wird wie folgt unter Voraussetzung des assoziativen und kommutativen Gesetzes (s. 65) auf ein Aggregat reduziert, welches nur einen oder zwei Punkte enthält:

Wenn α und β beide positiv sind (ebenso wenn beide negativ sind) und z. B. $\beta \geqq \alpha$ ist, so setze man

$$\alpha A + \beta B = \alpha \cdot 2M + (\beta - \alpha) B;$$

ist z. B. α positiv und $-\beta$ negativ und $\alpha > \beta$, so setze man

$$\alpha A - \beta B = (\alpha - 2\beta) A + \beta (2A - B).$$

Hierdurch können alle Koeffizienten bis auf einen resp. zwei beständig absolut verkleinert, also schließlich annulliert werden, und man erhält entweder:

$$\alpha A + \beta B + \cdots = (\alpha + \beta + \cdots) S$$

oder, falls die Koeffizientensumme verschwindet,

$$\alpha A + \beta B + \cdots = \lambda S - \lambda T,$$

und solche Ausdrücke können nicht weiter reduziert werden; dieselben heißen „uneigentliche" Spiegelungen.

65. Satz: Die Spiegelungen bilden eine Gruppe, und zwar ist die Addition der Spiegelungen assoziativ und kommutativ.

Beweis: Daß sie kommutativ ist, ist evident; denn der Mittelpunkt M von AB wird durch $AM = MB$ definiert, woraus $BM = MA$ folgt, d. h. es ist M auch Mittelpunkt von BA. Um auch das assoziative Gesetz zu beweisen:

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

sei $AM = MB$, $BN = NC$, $S = ([AN][CM])$, $[NP] \parallel [MQ] \parallel [BS]$, P auf $[CM]$, Q auf $[AN]$. Dann folgt (50): $CP = PS$, $AQ = QS$;

*) Mit Punktgrößen, aber ohne Interpretation derselben als Spiegelungen, rechnen ähnlich auch Möbius (Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, Cap. II = Ges. Werke Bd. I p. 36 ff.) und Graßmann (Geometrische Analyse, Leipzig 1847 = Ges. Werke Bd. I p. 321; Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Art 222 ff. = Ges. Werke Bd. I, 2 p. 151).

also (52): $[PQ] \| [CA]$, und $[NM] \| [CA]$, also $[NM] \| [PQ]$, also (53) $NS = SQ$, $MS = SP$, also, unter Annahme des assoziativen Gesetzes:

$$(A + B) + C = 2M + C = 2(M + P) - (2P - C) = 4S - S = 3S$$

und ebenso:

$$A + (B + C) = A + 2N = -(2Q - A) + 2(N + Q) = -S + 4S = 3S,$$

so daß die Voraussetzung des assoziativen Gesetzes niemals auf einen Widerspruch führt.

66. Definition: Unter dem Produkt zweier Affinitäten soll die durch aufeinanderfolgende Anwendung beider entstehende Affinität verstanden werden. Insbesondere ist also das Produkt der eigentlichen Spiegelungen A, B die durch den Vektor $2 \cdot AB$ repräsentierte Schiebung. Demnach ist $A \cdot A$ die Identität, also $\frac{1}{A} = A$ zu setzen, wodurch die Division auf die Multiplikation zurückgeführt wird. Die Produkte uneigentlicher Spiegelungen unter sich oder mit eigentlichen werden erklärt durch die Festsetzungen:

$$(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C = 2AB$$

$$A \cdot (C - D) = A \cdot C - A \cdot D = 2DC$$

$$(A - B) \cdot (C - D) = A \cdot C - B \cdot C - A \cdot D + B \cdot D = 2 \cdot AB - 2AB = 0,$$

die zugleich erkennen lassen, daß die uneigentlichen Spiegelungen singuläre Elemente sind, so daß eine Division mit ihnen nicht existiert.

67. Definition: Demnach können die Vektoren AB als Spiegelungsquotienten $\frac{A}{B}$ aufgefaßt werden und die früher als Addition dargestellte Komposition der Vektoren

$$AB + BC = AC$$

erscheint jetzt als Multiplikation:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C},$$

und zu dieser Multiplikation tritt jetzt eine Addition. Man bringe nämlich die zu addierenden Vektoren auf denselben Nenner (43, 46), dann ist

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

zu setzen und $A + B$ nach 64 zu definieren. Nunmehr bilden also die Vektoren nicht mehr bloß eine Gruppe, sondern ein Zahlensystem, für welches der Satz gilt:

68. Satz: Die Vektoren (Schiebungen) bilden ein singuläres Zahlensystem, in welchem die Addition und Multiplikation assoziativ, kommutativ und distributiv sind; Vektordifferenzen sind singulär.

Beweis: Das Bestehen des assoziativen und kommutativen Gesetzes für die Multiplikation folgt aus 57, 58, für die Addition aus 65, für die distributativen Gesetze folgendermaßen:

Um

$$A \cdot E \cdot (E \cdot B + E \cdot C) = A \cdot B + A \cdot C$$

zu beweisen, wo die Vektoren nach 43, 46 auf denselben Anfangs- resp. Endpunkt E gebracht sind, genügt es, mit Rücksicht auf $E^2 = 1$, zu zeigen, daß

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

ist. Dazu sei

$$AB = BB', \ AC = CC', \ BM = MC, \ B'D = DC',$$

also

$$AB = CD, \ AC = BD;$$

dann ist

$$B + C = 2M,$$

also

$$A \cdot (B + C) = 4AM = 2AD$$

und auch

$$A \cdot B + A \cdot C = AB' + AC' = 2AD.$$

Das zweite distributive Gesetz:

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

folgt aus dem ersten vermittelst

$$A \cdot B = -B \cdot A.\text{*)}$$

Vektordifferenzen sind singulär, denn es wird z. B.

$$(A \cdot E - B \cdot E)(E \cdot C - E \cdot D) = (A - B)(C - D) = 0 \quad \text{(s. 66).}$$

69. Definition: Eine Affinität, in welcher jeder uneigentliche Punkt und ein eigentlicher Punkt S sich selbst entsprechen, heißt „Dehnung“ oder im speziellen „Spiegeldehnung“, je nachdem der feste Punkt S nicht zwischen oder zwischen je zwei entsprechenden Punkten A, A' liegt. Eine Spiegeldehnung kann als aus einer Dehnung und einer Spiegelung zusammengesetzt angesehen werden.

*) Eine Multiplikation dieser Art heißt „äußere“ resp. „kombinatorische“ bei Graßmann (Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Kap. 3 § 1 u. 3 = Ges. Werke Bd. I, 2 p. 38 u. 56), „alternierend“ bei Hankel (Vorlesungen über die komplexen Zahlen, Leipzig 1867, p. 119), „polar“ bei Sylvester (American Journal of Mathematics I p. 127 u. 257), im Gegensatz zur „skalaren“ mit $A \cdot B = B \cdot A$ (Clifford, American Journal of Mathematics I p. 350 = Mathematical Papers, London 1882, p. 266).

70. Satz: Es gibt Dehnungen, in denen ein gegebener Punkt S sich selbst entspricht; entsprechen A', B' den Punkten A, B, so gehen $[AA']$, $[BB']$ durch S, und ist $[A'B'] \parallel [AB]$; liegt S zwischen (resp. nicht zwischen) A, A', dann auch zwischen (resp. nicht zwischen) B, B'.

Beweis: Die Existenz der Dehnungen folgt aus der der entsprechenden Projektivitäten oder wie folgt: Sind die drei verschiedenen Punkte A, A', S in einer Geraden, B nicht auf $[AA']$ gegeben, so findet man B' als Schnittpunkt von $[A'B'] \parallel [AB]$ mit $[BS]$. Dabei ist die Ordnung von $AA'S$ dieselbe wie die von $BB'S$.

Durch zweimalige Anwendung dieser Konstruktion wird auch zu jedem Punkt B auf $[AA']$ der entsprechende B' gefunden. Daß diese Konstruktionen eine Kollinearität definieren, folgt wie in 40. Ebenso, daß außer S kein eigentlicher Punkt, aber jeder uneigentliche Punkt sich selbst entspricht. Daß aber diese Konstruktionen widerspruchslos und eindeutig möglich sind, folgt aus den folgenden Sätzen:

71. Definition: Ein Punkttripel A, A', S einer Geraden heißt ein „Tensor“.*) Zwei Tensoren zweier Geraden eines Punktes S heißen gleich, wenn

$$[AB] \parallel [A'B']$$

ist. Diese Definition ist zulässig, da der Satz besteht:

72. Satz: Sind zwei Tensoren zweier Geraden von S einem dritten solchen gleich, so sind sie untereinander gleich.

Beweis: Ist $AA'S = BB'S$, $AA'S = CC'S$, d. h. $[AB] \parallel [A'B']$, $[AC] = [A'C']$, so folgt nach dem Desarguesschen Satze, daß der Punkt $([BC]\,[B'C'])$ auf der (uneigentlichen) Geraden der Punkte $([AB]\,[A'B'])$, $([AC]\,[A'C'])$ liegt, d. h. daß $[BC] \parallel [B'C']$, also $BB'S = CC'S$ ist.

73. Satz: Zu jedem Tensor $AA'S$ gibt es einen bestimmten gleichen Tensor $BB'S$, wenn B beliebig, nicht auf $[AA']$ gegeben ist.

Beweis wie zu 43.

74. Definition: Zwei Tensoren $AA'S$ und $BB'S$ einer Geraden heißen gleich, wenn sie nach 71 einem Tensor einer andern Geraden gleich sind.

Diese Definition ist zulässig, da jetzt allgemein der Satz besteht:

75. Satz: Sind zwei Tensoren eines Punktes S einem dritten solchen gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis wie zu 45.

---

*) In anderer Weise eingeführt von Hamilton, Elements of Quaternions, art. 185, deutsch von Glan (Leipzig 1882) I p. 208.

76. Satz: Zu jedem Tensor $AA'S$ gibt es einen bestimmten gleichen Tensor $BB'S$, wenn B beliebig auf $[AA']$ gegeben ist.

Beweis wie zu 46.

77. Durch die Sätze 72 bis 76 ist Satz 70 bewiesen, und es kann jetzt jede Dehnung, in welcher A dem A', und S sich selbst entspricht, durch den Tensor $AA'S$ repräsentiert werden.

78. Satz: Die Tensoren eines Punktes S bilden ein Zahlensystem.

Beweis folgt ohne weiteres aus dem entsprechenden Satze für Würfe, wenn man den Tensor $AA'S$ als Wurf $AA'SU$ (U uneigentlich) auffaßt. Die dort gegebenen Konstruktionen für die Addition und Multiplikation der Würfe überträgt man auf den vorliegenden Fall, indem man $A_0 = S$, $\{A_1 A_2 A_3\}$ als uneigentliche Ebene nimmt.

Insbesondere gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation für die Tensorenrechnung, wenn und nur wenn der Pascalsche Satz gilt. Alsdann sind auch Tensoren verschiedener Punkte $AA'S$, $BB'T$ vergleichbar: Parallele Tensoren heißen gleich.

79. Auf Grund der Tensoren kann man jetzt in die affine Geometrie Koordinaten einführen, die sich durch Spezialisierung aus den projektiven Koordinaten II 150 S. 136 ergeben. Wählt man z. B. für E_1, E_2, E_3 die Mittelpunkte von A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, so erhält man Möbius' baryzentrische Koordinaten.*) Wählt man $\{A_1A_2A_3\}$ in der uneigentlichen Ebene, so erhält man Cartesius' parallele Koordinaten (affine Koordinaten).**) Setzt man

$$\frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y, \quad \frac{x_3}{x_0} = z,$$

so ist

$$x = \frac{P_1 A_0}{E_1 A_0}, \quad y = \frac{P_2 A_0}{E_2 A_0}, \quad z = \frac{P_3 A_0}{E_3 A_0}$$

und $P = (x, y, z)$ der Schnittpunkt von drei Ebenen, die durch P_1, P_2, P_3 parallel zu den „Koordinatenebenen" $\{A_0A_2A_3\}$, $\{A_0A_3A_1\}$, $\{A_0A_1A_2\}$ gelegt werden, und die Gleichung jeder (eigentlichen) Ebene hat die Form: $ax + by + cz + d = 0$.

80. Satz: Tensoren $AA'S$, $BB'T$ paralleler Geraden sind gleich, wenn und nur wenn $[AA']$, $[BB']$, $[ST]$ durch einen Punkt gehen oder parallel sind.

Beweis: Aus II 114 S. 110 folgt, daß die Würfe $AA'SU$, $BB'TU$,

---

*) Möbius, Der baryzentrische Calcul (Leipzig 1827) § 33 = Ges. Werke I p. 54.

**) Des Cartes, Géométrie (Leyden 1637), deutsch von Schlesinger (Berlin 1894) p. 19 ff.

wo U der gemeinsame uneigentliche Punkt beider Geraden ist, nur in dem angegebenen Falle gleich sind.

81. Satz: Liegen ABC auf einer, $A_1B_1C_1$ auf einer dazu parallelen Geraden, und bestehen die Vektorengleichungen $AB = A_1B_1$, $AC = C_1B_1$, so ist Tensor $CAB = C_1B_1A_1$.

Beweis: Wie aus 50 oder 54 folgt, treffen sich $[AB_1]$, $[A_1B]$ und $[AB_1]$, $[CC_1]$ im Mittelpunkt von AB_1; da derselbe nach 53 eindeutig bestimmt ist, gehen $[AB_1]$, $[BA_1]$, $[CC_1]$ durch einen Punkt. Da außerdem $[AB] \parallel [A_1B_1]$, so ist nach 80 $CAB = C_1B_1A_1$. — Entsprechend für koinzidierende Geraden.

82. Satz: Das Stattfinden der Tensorgleichung

$$A'AB = \lambda$$

und der Vektorgleichung

$$A''B'' = A'B$$

darf mit

$$A''B'' = \lambda \cdot AB$$

bezeichnet werden, da dies mit der Vektorkomposition 56 in Einklang ist.

Beweis: Es sei

$$A''B'' = \lambda \cdot AB$$
$$B''C'' = \lambda \cdot BC,$$

so ist zu zeigen, daß auch $A''C'' = \lambda \cdot AC$ ist. Ist $A''B'' = A'B$, so folgt aus der ersten Gleichung $A'AB = \lambda$. Ist $B''C'' = BC' = C_1C$, so folgt aus der zweiten Gleichung $C_1BC = \lambda$, also (81) $C'CB = \lambda$, also $C'CB = A'AB$, also (71) $[AC] \parallel [A'C']$. Ist nun $A''C = A'C'$, also $[A'A''] \parallel [BC]$, so folgt $A''AC = A'AB = \lambda$, also $A''C = \lambda \cdot AC$, $A'C' = \lambda \cdot AC$, was zu beweisen war.

83. Demnach kann man den Tensor $A'AB$ als das Verhältnis zweier Vektoren $\frac{A''B''}{AB}$ auf derselben oder auf parallelen Geraden betrachten, und das Produkt aus einem Tensor und einem Vektor ist ein Vektor. Infolgedessen werden Addition und Multiplikation von Tensoren durch die Formeln

$$\frac{A'B'}{AB} + \frac{A''B''}{AB} = \frac{A'B' + A''B''}{AB}$$

$$\frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{AB}{A''B''} = \frac{A'B'}{A''B''}$$

erklärt (analog zu 67).

84. Der Tensor einer Spiegelung ist gleich -1.

85. Definitionen: Figuren, die auseinander durch bloße Dehnungen und Schiebungen hervorgehen, heißen ähnlich und ähnlich

gelegen; Figuren, die auseinander durch Dehnungen und Schiebungen und eine Spiegelung hervorgehen, heißen symmetrisch und symmetrisch gelegen. Ein Halbgeradenpaar eines Punktes heißt ein Winkel; ähnliche oder symmetrische Winkel heißen gleich. Die beiden Halbgeraden einer Geraden bilden einen gestreckten Winkel. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ drei Halbgerade eines Punktes, so heißt der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ die Summe der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Unter dem Winkel A eines Dreiecks ABC versteht man das die Punkte B, C enthaltende Halbgeradenpaar des Punktes A. Unter der Seite AB eines Dreiecks versteht man den Vektor AB.

86. Satz: In ähnlichen oder symmetrischen Dreiecken sind entsprechende Winkel gleich, entsprechende Seiten parallel und die drei Verhältnisse der parallelen Seitenpaare gleich.

Beweis folgt aus 83 und 85.

87. Satz: Die Summe der Winkel eines Dreiecks ABC ist einem gestreckten gleich.

Beweis: Sei $[A''CB''] \parallel AB$, $AC = CA'$, $BC = CB'$, so ist $\angle A = \angle A'CB''$, $\angle B = A''CB'$ (durch Schiebungen), $\angle C = B'CA'$ (durch Spiegelung); also die Summe gleich $A''CB''$, einem gestreckten Winkel.

88. Satz: Bezeichnet man mit t Tensoren, mit v Vektoren, so bilden die Aggregate (t, v) ein singuläres Zahlensystem.

Beweis: Man setze Addition und Multiplikation wie folgt fest:

$$(t, v) + (t_1, v_1) = (t + t_1, v + v_1)$$
$$(t, v) \cdot (t_1, v_1) = (tt_1, tv_1 + t_1 v),$$

wo die Summen und Produkte nach 56, 78, 83 aufzufassen sind. Die Gültigkeit der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze der Addition und Multiplikation liegt auf der Hand, z. B. wird

$$(t, v) \cdot (t_1, v_1) \cdot (t_2, v_2) = (tt_1 t_2, v t_1 t_2 + t v_1 t_2 + t t_1 v_2)$$

und

$$((t, v) + (t_1, v_1))\,(t_2, v_2) = (t + t_1, v + v_1) \cdot (t_2, v_2)$$
$$= (tt_2 + t_1 t_2, t_2 v + t_2 v_1 + tv_2 + t_1 v_2)$$
$$= (tt_2, tv_2 + t_2 v) + (t_1 t_2, t_1 v_2 + t_2 v_1) = (t, v)\,(t_2, v_2) + (t_1, v_1)\,(t_2, v_2).$$

Die Zahlen $(0, 0)$ sind als Null, $(1, 0)$ als Eins zu betrachten. Die Zahlen $(0, v)$ sind singulär, denn es wird

$$(0, v)\,(0, v_1) = (0, 0)$$

bei jedem v und v_1. Die Zahlen (t, v) können als „duale" Zahlen (s. I 46, 76 S. 17, 23) $t + \varepsilon v$, mit $\varepsilon^2 = 0$, aufgefaßt werden.

89. Definition: Wir betrachteten bisher parallele Tensoren oder Dehnungen als identisch. Nunmehr wollen wir dieselben nur dann als identisch betrachten, wenn sie sich auf denselben festen Punkt S beziehen. Solche Tensoren oder Dehnungen sollen „gebundene" heißen; demgegenüber heißen die früher betrachteten „freie". Ein Vektor ist als ein an einen uneigentlichen Punkt gebundener Tensor, ein uneigentlicher Tensor, anzusehen.

90. Satz: Das Produkt gebundener Tensoren (s. 78) ist ein gebundener Tensor.

Beweis: Es seien zwei an die Punkte S_1, S_2, die auch uneigentlich sein können, gebundene Tensoren $A_1 A S_1$, $A_2 A S_2$ gegeben. Man konstruiere

$$A_{12}, B_1, B_2, B_{12}, C_1, C_2, C_{12}$$

aus

$$A_{12} A_1 S_2 = B_{12} B_1 S_2 = B_2 B S_2 = A_2 A S_2, \; B_1 B S_1 = A_1 A S_1.$$

Dann ergibt der Desarguessche Satz aus den Dreiecken $A A_1 A_{12}$, $B B_1 B_{12}$, daß sich $[A A_{12}]$, $[B B_{12}]$ in demselben Punkte S_{12} von $[S_1 S_2]$ schneiden, und es ist $A_{12} A S_{12} = B_{12} B S_{12}$ das Produkt der gegebenen Tensoren.

91. Satz: Die Multiplikation gebundener Tensoren (s. 90) ist stets assoziativ, aber kommutativ nur, wenn beide uneigentlich sind.

Beweis: Das Letztere ergibt sich unmittelbar; denn ist

$$A_{12} A_1 S_2 = A_2 A S_2, \; A_{21} A_2 S_1 = A_1 A S_1,$$

so ist $A_{12} = A_{21}$ nur, wenn $[A_2 A_{21}] \parallel [A A_1]$, $[A_1 A_{12}] \parallel [A A_1]$, also $S_1 = ([A_2 A_{21}]\,[A A_1])$, $S_2 = ([A_1 A_{21}]\,[A A_2])$, also beide uneigentlich sind.

Das assoziative Gesetz ergibt sich z. B. wie folgt: Es sei

$$A_2 A S_2 = A_{12} A_1 S_2, \; A_{23} A_2 S_3 = A_{(12)3} A_{12} S_3,$$

dann ergeben die Dreiecke $A A_2 A_{23}$, $A_1 A_{12} A_{(12)3}$ vermittelst des Desarguesschen Satzes, daß sich $[A A_{23}]$, $[A_1 A_{(12)3}]$ in demselben Punkte S_{23} von $[S_2 S_3]$ schneiden. Demnach ist

$$A_{(12)3} A_1 S_{23} = A_{23} A S_{23}, \quad \text{d. h.} \quad A_{(12)3} = A_{1(23)}.$$

92. Definition: Als Summe der gebundenen Tensoren $A_1 A S_1$, $A_2 A S_2$ wird der Tensor $A_{1+2} A S_{1+2}$ definiert, in welchem

$$S_{1+2} = \big((S_1 S_2]\,[A\,([A_1 S_2]\,[A_2 S_1])]\big)$$

$$A_{1+2} = \big([A_1 A_2]\,[A\,([A_1 S_2]\,[A_2 S_1])]\big)$$

ist. Diese Definition ist zulässig, da der Satz besteht:

93. Satz: Ist $A_1AS_1 = B_1BS_1$, $A_2AS_2 = B_2BS_2$, so ist die Summe der Tensoren A_1AS_1, A_2AS_2 gleich der Summe der Tensoren B_1BS_1, B_2BS_2.

Beweis: Der Desarguessche Satz ergibt aus den Dreiecken AA_1A_2, BB_1B_2, daß sich $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$ in demselben Punkte von $[S_1S_2]$ schneiden; dieser ist in bezug auf S_1S_2 der vierte harmonische von S_{1+2}. Ist jetzt $B_{1+2} = ([BS_{1+2}][B_1B_2])$, so ergibt der Desarguessche Satz aus den Dreiecken AA_1A_{1+2}, BB_1B_{1+2}, daß

$$[A_{1+2}B_{1+2}] \quad [AB]$$

ist; also ist

$$B_{1+2}BS_{1+2} = A_{1+2}AS_{1+2},$$

was zu beweisen war.

94. Satz: Die Addition gebundener Tensoren ist kommutativ und assoziativ.

Beweis: Man erkennt dies am einfachsten, wenn man eine durch S_1, S_2 resp. S_1, S_2, S_3 gehende Ebene als uneigentlich betrachtet; dann sind die in 57, 58 gegebenen Beweise unmittelbar übertragbar.

95. Satz: Für die Addition und Multiplikation gebundener Tensoren gelten die beiden distributiven Gesetze.

Beweis: Ist zunächst das erste distributive Gesetz für die Tensoren

$$(A_0AS_0)\cdot((A_1AS_1)+(A_2AS_2)) = (A_0AS_0)\cdot(A_1AS_1)+(A_0AS_0)\cdot(A_2AS_2)$$

zu beweisen, so seien A_{1+2}, S_{1+2} wie in 92 erklärt, ferner (s. Fig. S. 199)

$$A_{10},\ A_{20},\ S_{10},\ S_{20},\ A_{(1+2)0},\ S_{(1+2)0}$$

wie in 90. Dann gehen

$$[S_1A_1],\ [A_2S_2],\ [S_{10}A_{10}],\ [A_{20}S_{20}]$$

durch einen Punkt A; also liegen nach dem Desarguesschen Satz auf je einer Geraden die Punkte

$$([S_1A_2][A_1S_2]) = P,\quad ([A_2A_{20}][S_2S_{20}]) = S_0,\quad ([S_1A_{20}][A_1S_{20}])$$

und die Punkte

$$([S_1S_{10}][A_1A_{10}]) = S_0,\quad ([S_{10}A_{20}][S_{20}A_{10}]) = Q,\quad ([S_1A_{20}][A_1S_{20}]);$$

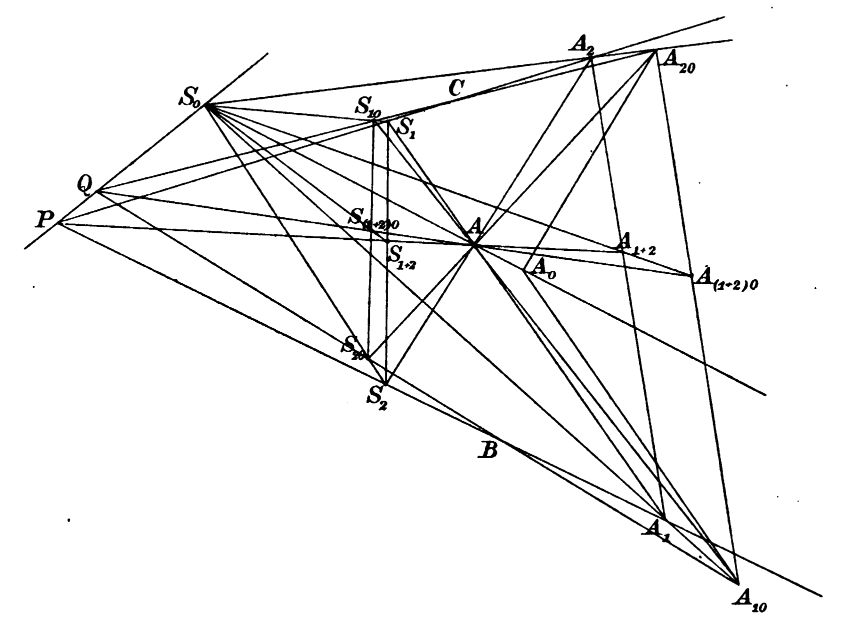
also gehen $[S_{10}A_{20}]$, $[S_{20}A_{10}]$ durch einen Punkt Q von $[PS_0]$. Ferner gehen $[A_1A_{10}]$, $[A_2A_{20}]$, $[S_1S_{10}]$, $[S_2S_{20}]$ durch einen Punkt S_0; also liegen auf je einer Geraden die Punkte

$$([A_1S_1][A_{10}S_{10}] = A,\quad ([A_1S_2][A_{10}S_{20}] = B,\quad ([S_1S_2]]S_{10}S_{20})]$$

und die Punkte

$$([A_2 S_2]\,[A_{20} S_{20}]) = A, \quad ([A_2 S_1]\,[A_{20} S_{10}]) = C, \quad ([S_1 S_2]\,[S_{10} S_{20}]),$$

also auch die Punkte A, B, C. Nun ergibt der Desarguessche Satz aus den Dreiecken BA_1A_{10}, CA_2A_{20}, daß $[BC] \parallel [A_1A_2] \parallel [A_{10}A_{20}]$ ist, also aus den Dreiecken BA_1A_{10}, $AA_{1+2}A_{(1+2)0}$, daß $[AA_{(1+2)0}]$ durch den Punkt Q geht. Demnach ist $A_{(1+2)0}$ zugleich der mit A_{10+20} zu bezeichnende Punkt. Jetzt sei $S_{10+20} = ([QA]\,[S_{10}S_{20}])$;



dann ergeben die beiden Dreiecke BS_2S_{20}, $AS_{1+2}S_{10+20}$, da nach obigem $[AB]$, $[S_2S_{1+2}] = [S_1S_2]$, $[S_{20}S_{10+20}] = [S_{10}S_{20}]$ durch einen Punkt gehen, daß $[S_2S_{20}]$, $[S_{1+2}S_{10+20}]$ durch S_0 gehen, daß also S_{10+20} auf $[S_0S_{1+2}]$ liegt, also gleich $S_{(1+2)0}$ ist. Demnach sind die Tensoren

$$A_{(1+2)0}AS_{(1+2)0} \quad \text{und} \quad A_{10+20}AS_{10+20}$$

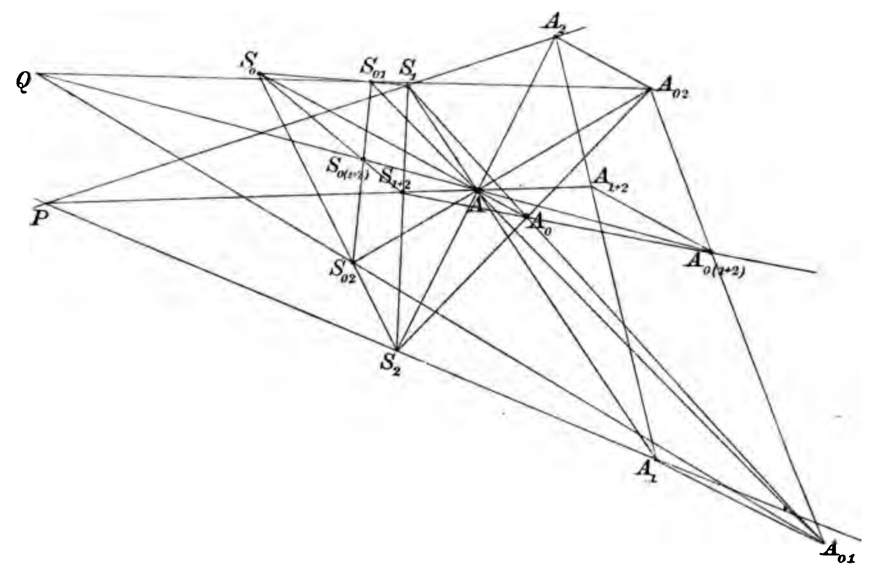
einander gleich, was zu beweisen war.

Zum Beweise des zweiten distributiven Gesetzes für gebundene Tensoren seien (s. Fig. S. 200) die Punkte S_0, S_1, S_2, A gegeben und die Punkte A_0, A_1, A_2, A_{1+2}, S_{1+2}, A_{01}, S_{01}, A_{02}, S_{02}, $A_{0(1+2)}$, $S_{0(1+2)}$ nach den gegebenen Vorschriften konstruiert. Dann folgt zunächst aus den Dreiecken AA_2A_{1+2}, $A_0A_{02}A_{0(1+2)}$, daß $[A_{02}A_{0(1+2)}]$ durch

$([S_1 S_2]\,[A_1 A_2])$ geht; ebenso aus den Dreiecken $A A_1 A_{1+2}$, $A_0 A_{01} A_{0(1+2)}$, daß $[A_{01} A_{0(1+2)}]$ durch denselben Punkt $([S_1 S_2]\,[A_1 A_2])$. Demnach liegt $A_{0(1+2)}$ auf $[A_{01} A_{02}]$. Nun liegen die drei Punkte

$$([A_{02} S_{02}]\,[A_{01} S_{01}]) = A, \quad ([A_{02} A_{0(1+2)}]\,[A S_{01}]) = A_{01},$$
$$([S_{02} A_{0(1+2)}]\,[A_{01} A])$$

auf der Geraden $[A A_{01}]$; demnach gehen die Geraden $[A_{02} S_{01}]$, $[S_{02} A_{01}]$, $[A_{0(1+2)} A]$ durch einen Punkt Q. Also ist $A_{0(1+2)} = A_{0\cdot 1+0\cdot 2}$. Ferner



gehen durch A_0 die Geraden $[S_0 A]$, $[S_{1+2} A_{0(1+2)}]$, $[S_1 A_{01}]$, $[S_2 A_{02}]$; also liegen in einer Geraden sowohl die Punkte

$$([S_0 S_1]\,[A A_{01}]) = S_{01}, \quad ([S_0 S_2]\,[A A_{02}]) = S_{02}, \quad ([S_1 S_2]\,[A_{01} A_{02}])$$

als auch die Punkte

$$([S_0 S_{1+2}]\,[A A_{0(1+2)}]), \quad ([S_0 S_2]\,[A A_{02}]) = S_{02},$$
$$([S_2 S_{1+2}]\,[A_{02} A_{0(1+2)}]) = ([S_1 S_2]\,[A_{01} A_{02}]);$$

also auch die Punkte

$$S_{01},\ S_{02},\ ([S_0 S_{1+2}]\,[A A_{0(1+2)}]),$$

d. h. es gehen durch einen Punkt die Geraden $[S_0 S_{1+2}]$, $[A A_{0(1+2)}]$, $[S_{01} S_{02}]$, oder es ist

$$S_{0(1+2)} = S_{0\cdot 1+0\cdot 2};$$

demnach sind die Tensoren

$$A_{0(1+2)}AS_{0(1+2)} \quad \text{und} \quad A_{0\cdot 1+0\cdot 2}AS_{0\cdot 1+0\cdot 2}$$

einander gleich, was zu beweisen war.

96. Satz: Die gebundenen Tensoren bilden ein singuläres Zahlensystem, in welchem die Differenzen der Vektoren (uneigentlichen Tensoren) singulär sind.

Beweis folgt aus 68, 90, 91, 94, 95.

97. Der gebundenen Tensorenrechnung entspricht in der projektiven Geometrie eine gebundene Wurfrechnung. Man erhält diese aus jener, indem man eine beliebige Ebene zur uneigentlichen wählt. Die an einen Punkt S und eine nicht durch ihn gehende Ebene E, die aber hier für alle Würfe dieselbe ist, gebundenen Würfe repräsentieren diejenigen Kollinearitäten, in welchen S und jeder Punkt von E sich selbst entspricht. Zwischen der freien und der gebundenen Wurfrechnung bestehen, ebenso wie bei den entsprechenden Tensorenrechnungen, zwei wesentliche Unterschiede: für die freie Wurfrechnung gelten die Gesetze B und C, d. h. die Abwesenheit singulärer Zahlen und das kommutative Gesetz der Multiplikation (letzteres wenigstens, wenn der Pascalsche Satz gilt), für die gebundene Wurfrechnung bestehen beide Gesetze nicht.

98. Der wesentlich neue Gesichtspunkt, unter dem in den vorstehenden Untersuchungen das Rechnen mit Verwandtschaften betrachtet wurde, besteht in der Auffassung von Systemen von Verwandtschaften als Zahlensystemen, welche früher nur als Gruppen angesehen wurden. Dazu war die Aufstellung von jedesmal zwei verschiedenen Kompositionsarten erforderlich, die den bekannten Gesetzen der Addition und Multiplikation, insbesondere den distributiven Gesetzen genügen. Und zwar erhielt man ein Zahlensystem aus einer Gruppe von Elementen $a, b, c, \ldots$, für welche eine als Addition $a + b$ aufgefaßte Komposition besteht, indem man die Quotienten $\frac{a}{b}$ der Elemente der Gruppe als Elemente des Zahlensystems einführte. Die Multiplikation derselben ergibt sich dann aus

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

die Addition aus der Addition in der Gruppe, also aus

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c};$$

wozu noch nötig war, daß jedes Element $\frac{a}{b}$ mit beliebig gewähltem Zähler oder Nenner repräsentiert werden konnte. Für eine Gruppe $a, b, c, \ldots$ von „allgemeinen Spiegelungen", d. h. Verwandtschaften, für welche $a^2, b^2, c^2, \ldots$ der Identität gleich sind, werden die Quotienten $\frac{a}{b}$ den Produkten $a \cdot b$ gleich und man erhält Wieners „zweispiegelige" Verwandtschaften*), bei denen aber hier nicht bloß nach der Gruppeneigenschaft, sondern nach der Zahlensystemeigenschaft gefragt wird. Aber die Einführung der Quotienten von Verwandtschaften statt der Produkte von Spiegelungen ist der weitertragende Gedanke. So sind z. B. die Vektoren (nach 67) zweispiegelige Verwandtschaften, die gebundenen Tensoren (nach 96) nicht, wohl aber Quotienten von Verwandtschaften.

Die Rechnungen mit Vektoren und mit gebundenen Tensoren können als die beiden einfachsten Fälle von Lösungen des Problems angesehen werden:

Zahlensysteme von Projektivitäten aufzustellen.

Weitere Fälle von Lösungen werden sich in der metrischen Geometrie ergeben.

99. Mit Rücksicht auf 48, 49 geht der projektive Grundsatz der Meßbarkeit in den folgenden „affinen Grundsatz der Meßbarkeit" über.

Liegt A_1 zwischen A_0 und X und macht man

$$A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{k-1}A_k = \cdots,$$

so gibt es eine ganze Zahl k, so daß X zwischen A_0 und A_k liegt.

Für diesen Satz und seine Konsequenzen gelten also alle in der projektiven Geometrie für den projektiven Grundsatz der Meßbarkeit ausgesprochenen Sätze. Insbesondere wird durch ihn der Pascalsche Satz beweisbar.

100. In dem affinen Grundsatz der Meßbarkeit (99) haben die Gleichungen

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \text{usw.}$$

nur Bedeutung im Sinne der Definitionen 41, 44, deren Zulässigkeit in der Ebene nur unter Voraussetzung des Desarguesschen Satzes nachgewiesen wurde (42, 45) und nachgewiesen werden konnte. Um letzteres zu zeigen, definieren wir zwei Gerade der Nicht-Desarguesschen Geometrie (s. II 59 S. 68) als parallel, wenn ihre außerhalb des Kreises

*) Wiener, Leipz. Akad. Ber., Math. phys. Kl. 43 (1891) p. 644.

liegenden Teile im gewöhnlichen Sinne des Wortes parallel sind, zwei Strecken $AB = A'B'$ zweier Geraden als gleich, wenn im Sinne der eben gegebenen Definition $[AB] \parallel [A'B']$, $[AA'] \parallel [BB']$ ist. Dann soll gezeigt werden, daß den Forderungen $AB = A'B'$, $AB = A''B''$, $A'B' = A''B''$ bei gegebenem A, A', B', A'', B'' unter Umständen durch keinen Punkt B genügt werden kann.

Man wähle den Punkt A auf dem Umfang des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, einen Punkt B_1 auf einer Sehne (keinem Durchmesser) AC, zwischen A und C, ziehe die Zentralen $[AOA']$, $[B_1OB'']$, und wähle die Strecken $A''B''$, $A'B'$ außerhalb des Kreises so, daß im gewöhnlichen Sinn des Wortes die Strecken AB_1, $A'B'$, $A''B''$ gleich und parallel sind. Schneiden sich dann die Nicht-Desarguesschen Geraden $[AC]$ und $[B_1B']$ im Punkte B, so ist nach Definition die Nicht-Desarguessche Strecke $AB = A'B'$; sie müßte also auch gleich $A''B''$ sein, d. h. es müßte B auf $[B_1O]$ liegen. Nun ist B_1 das Potenzzentrum der drei vorkommenden Kreise, als Schnittpunkt der Potenzaxen $[AC]$, $[B'B_1]$ zweier von ihnen mit dem dritten. Also müßte $[BB_1]$ die dritte Potenzaxe, also O ein Punkt gleicher Potenzen der beiden zu den Nicht-Desarguesschen Geraden $[AC]$, $[B'B_1]$ gehörenden Kreise sein. Sind

$$\lambda_p (x^2 + y^2 - 1) + (ax + by + p) = 0$$
$$\lambda_q (x^2 + y^2 - 1) + (cx + dy + q) = 0$$

die Gleichungen derselben, so müßten die Potenzen im Punkte $O (x = 0,\ y = 0)$, nämlich

$$1 - \frac{p}{\lambda_p}, \quad 1 - \frac{q}{\lambda_q}$$

einander gleich sein. Nimmt man die eine der Geraden $[AC]$ als gegeben an, so kann der Abstand q der andern von O noch willkürlich gewählt werden, und es kann nicht bei jeder Wahl von q

$$1 - \frac{q}{\lambda_q} = 1 - \frac{p}{\lambda_p}$$

sein, da sonst $\lambda_q = q \cdot \text{const.}$ wäre, was ausgeschlossen war.

101. Infolgedessen entsteht die Frage nach der Beweisbarkeit des ebenen Desarguesschen Satzes auf Grund des affinen Grundsatzes der Meßbarkeit (99), wenn darin die Gleichheit von Strecken einer Geraden anderweitig, aber jedenfalls so definiert wird, daß durch $A_0A_1 = A_1A_2$ und A_0, A_1 der dritte Punkt A_2 eindeutig bestimmt ist. Die Unabhängigkeit des Desarguesschen Satzes von dem so aufgefaßten Grundsatz der Meßbarkeit folgt ohne weiteres aus

unserer Nicht-Desarguesschen Geometrie, wenn man in ihr die Strecken auf den Nicht-Desarguesschen Geraden in der gewöhnlichen Weise mißt.

Nicht-Euklidische affine Geometrie.

Für diese ist der Grundsatz charakteristisch:

102. Grundsatz: Auf jeder eigentlichen Geraden liegen mehrere uneigentliche Punkte: also in jeder Ebene mehrere uneigentliche Gerade, im Raume mehrere uneigentliche Ebenen. D. h. wenn wir jetzt die Ausdrucksweise „uneigentlicher Punkt“ fallen lassen und zur ursprünglichen Bedeutung derselben zurückkehren:

Zu jeder Geraden $\mathfrak{G}$ gibt es durch einen Punkt P außerhalb derselben in der Ebene $\{P\mathfrak{G}\}$ mehr als eine sie nicht schneidende Gerade.

Hier ist die Bemerkung zu 36 entsprechend zu wiederholen.

103. Wir führen zunächst nach III 150 S. 136 Koordinaten ein, wobei natürlich auch die uneigentlichen Elemente Koordinaten bekommen, und ersetzen nunmehr für die Vorstellung die zu behandelnde Nicht-Euklidische Geometrie durch die ihr zugeordnete Koordinatengeometrie.

104. Auf einer (eigentlichen) Geraden $\mathfrak{G}$ des eigentlichen Punktes A wähle man zwei uneigentliche Punkte $U \neq V$, die nach 102 vorhanden sind. Für jeden andern eigentlichen Punkt P der Geraden sind AP, UV nicht getrennt: also entweder AU, PV getrennt oder AV, PU getrennt. Die erstern Punkte sollen mit $B, B', \ldots,$ die letztern mit $C, C', \ldots$ bezeichnet werden. Für irgend zwei Punkte BB' findet entweder die Folge $VUBB'$ oder $VUB'B$, also z. B. das erstere statt. Dann folgt aus $VUBB'$ und $VUAB$ (nach III 14 S. 147) die Folge $VABB'$: also tritt niemals die Folge $AWBB'$ oder $ABWB'$ auf, denn aus der ersten Folge und $ABB'V$ folgte ebenso $AWBV$ (gegen 25 S. 179), und aus der zweiten Folge und $ABB'V$ folgte ebenso $AWB'V$. Also findet stets eine der Folgen

$$ABB'W \quad \text{oder} \quad AB'BW \quad \text{statt.}$$

105. Wir wollen Punkte I, J auf der Geraden $\mathfrak{G}$ gemäß den folgenden Anordnungsbeziehungen suchen:

Es sei AI, BW getrennt und AJ, CW getrennt für beliebig viele eigentliche Punkte $B, C\ (\neq A)$ und für beliebig viele uneigentliche Punkte W.

Dann ist zunächst die Widerspruchslosigkeit dieser Bedingungen nachzuweisen.

Zwei Bedingungen wie:

$$AI,\ BW \text{ getrennt}, \quad AI,\ BW' \text{ getrennt}$$

stehen nicht in Widerspruch, da aus ihnen folgt

$$AB,\ WI \text{ nicht getrennt}, \quad AB,\ W'I \text{ nicht getrennt},$$

also AB, WW' nicht getrennt, was nach IV 25 S. 179 der Fall ist.

Zwei Bedingungen wie:

$$AI,\ BW \text{ getrennt}, \quad AI,\ B'W \text{ getrennt}$$

stehen nicht in Widerspruch, da aus ihnen folgt:

$$WA,\ BI \text{ nicht getrennt}, \quad WA,\ B'I \text{ nicht getrennt},$$

also WA, BB' nicht getrennt, was nach 102 der Fall ist.

Zwei Bedingungen wie:

$$AI,\ BW \text{ getrennt}, \quad AI,\ B'W' \text{ getrennt} \quad (B \neq B',\ W \neq W')$$

stehen nicht in Widerspruch.

Denn es sind

$$AB,\ WW' \text{ nicht getrennte}, \quad AB,\ WI \text{ nicht getrennte},$$

also AB, $W'I$ nicht getrennte Paare; sind nun auch BI, AW' nicht getrennt, so folgt hieraus und aus $B'I$, AW' nicht getrennt, daß auch BB', AW' nicht getrennt sind, in Übereinstimmung mit 104. Andernfalls findet die Folge $W'IAB$ statt, die mit $W'IB'A$ zusammen (nach III 14 S. 147) die Folge $W'B'AB$ ergibt, in Übereinstimmung mit 104.

106. Satz: Existieren auf der Geraden $\mathfrak{G}$ Punkte I, J gemäß den in 105 aufgestellten Anordnungsbeziehungen, so sind diese Punkte uneigentliche.

Beweis: Wäre z. B. I eigentlich, so wählen wir auf einer Geraden $\overline{\mathfrak{G}} = [\overline{B}\overline{B}']$ einen Punkt $\overline{I}$ zwischen $\overline{B}$, $\overline{B}'$ und bringen durch eine Affinität den Punkt $\overline{I}$ mit I, die Gerade $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{G}$ zur Deckung; dann entsprechen den eigentlichen Punkten $\overline{B}$, $\overline{B}'$ eigentliche Punkte B, B'. Da nun für jeden uneigentlichen Punkt $\overline{W}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ stets $\overline{W}\overline{I}$, $\overline{B}\overline{B}'$ getrennt sind, und die Anordnung erhalten bleibt, so sind auch WI, BB' getrennte Paare, also einer der Punkte BB' z. B. der Punkt B von A getrennt durch WI, also AI, BW nicht getrennt, gegen die Voraussetzung.

107. Satz: Unter Voraussetzung der Dedekindschen Stetigkeit existieren auf einer eigentlichen Geraden $\mathfrak{G}$ Punkte I, J, die den in 105 aufgestellten Anordnungsbeziehungen genügen, wenn darin nunmehr für BC alle eigentlichen Punkte B resp. C, für W alle diejenigen uneigentlichen Punkte W genommen werden, für welche un-

eigentliche Punkte W' existieren, so daß AW', BW resp. AW', CW getrennt sind.

Beweis folgt aus der Stetigkeit und aus der in 105 bewiesenen Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Bedingungen.

108. Satz: Die nach 107 auf einer eigentlichen Geraden $\mathfrak{G}$ existierenden Punkte I, J sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Existiert außer I ein zweiter (uneigentlicher) Punkt I', der denselben Bedingungen genügt, so ist AB, II' nicht getrennt, also findet entweder die Folge $AII'B$ oder $AI'IB$ statt. Ist nun AW, II' getrennt, also W uneigentlich, so folgen aus den Reihenfolgen $AIWI'$ und $AII'B$ die Folgen $AWI'B$ und $AIWB$ (s. III 14 S. 147), d. h. AI, BW nicht getrennt, während W nicht zu den angenommenen Punkten gehört; denn es existiert $W' = I'$ so, daß AW', BW getrennt. Ebenso ergeben sich aus den Folgen $AI'WI$ und $AI'IB$ die Folgen $AWIB$ und $AI'WB$, d. h. AI', BW nicht getrennt, während W nicht zu den ausgenommenen Punkten gehört, denn es existiert $W' = I$ so, daß AW', BW getrennt sind.

109. Definition: Die nach 107, 108 auf jeder eigentlichen Geraden existierenden zwei bestimmten uneigentlichen Punkte I, J heißen die „Grenzpunkte" derselben. Die Menge der Grenzpunkte im Raume heißt das „Grenzoval". Dasselbe hat also die Eigenschaft, von jeder eigentlichen Geraden in genau zwei Punkten geschnitten zu werden.

110. Satz: Bei jeder Affinität entspricht das Grenzoval sich selbst.

Beweis: Da bei einer Affinität die eigentlichen Punkte den eigentlichen, die uneigentlichen den uneigentlichen entsprechen und die Ordnungsbeziehungen erhalten bleiben, müssen die durch Ordnungsbeziehungen in bezug auf eigentliche und uneigentliche Punkte definierten Grenzpunkte ebenso definierten Punkten, also Grenzpunkten entsprechen.

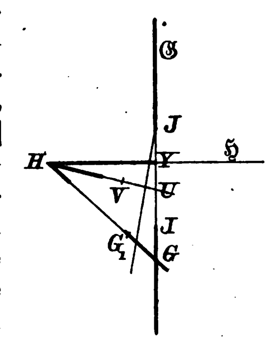
111. Definition: Geht eine eigentliche Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen Grenzpunkt einer eigentlichen Geraden $\mathfrak{H}$, so heißt $\mathfrak{G}$ parallel ($\parallel$) zu $\mathfrak{H}$.

112. Satz: Ist $\mathfrak{G}$ parallel zu $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{H}$ parallel zu $\mathfrak{G}$*); d. h.

*) Diesen Satz beweist z. B. auch J. Bolyai, aber mit Benutzung von Kongruenzgrundsätzen. Vgl. Appendix Scientiam spatii absolute veram exhibens § 6. — Ebenso Gauß (Werke VII p. 203), der dazu äußert: „Nicht ganz so evident ist die Reziprokität des Parallelismus". — Lindemann (Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1891, II 1, 3. Abt. und neuerdings in den Anmerkungen zu Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, deutsch von F. und L. Lindemann, Leipzig 1904,

jeder Grenzpunkt einer Geraden ist Grenzpunkt jeder durch ihn gehenden Geraden.

Beweis (s. Fig., in welcher die eigentlichen Teile der Geraden stark gezeichnet sind): Angenommen ein Grenzpunkt Y der Geraden $\mathfrak{H}$ sei ein von einem Grenzpunkt verschiedener uneigentlicher Punkt der Geraden $\mathfrak{G} = [IJ]$. Es sei H ein eigentlicher Punkt von $\mathfrak{H}$. Die Halbgerade $[HY]$ ist die Gesamtheit der von einem uneigentlichen Punkte durch HY getrennten eigentlichen Punkte. Es sei U irgend ein uneigentlicher Punkt von $[IJ]$, z. B. getrennt von J durch IY oder $U = I$. Wir behaupten: Die Gerade $[HU]$ wird von keiner, die Halbgerade $[HY]$ schneidenden Geraden $[JV]$ in einem uneigentlichen Punkte geschnitten. Angenommen nämlich, es gäbe einen solchen uneigentlichen Punkt V, so wäre auch jeder von H durch VU getrennte Punkt uneigentlich, also schnitte auch jede von $[JH]$ durch $[JV]$ $[JU]$ getrennte Gerade die Gerade $[HU]$ in einem uneigentlichen Punkte. Nun werde durch einen eigentlichen Punkt G von $\mathfrak{G}$ die Gerade $[HG]$ gezogen. Schneidet jede Gerade von J, welche die Halbgerade $[HY]$ schneidet, die Gerade $[GH]$ in einem eigentlichen Punkte, so werde irgend eine derselben mit G_1 bezeichnet. Andernfalls sei G_1 ein solcher eigentlicher Punkt von $[GH]$, daß kein von H durch $G_1 G$ getrennter Punkt uneigentlich ist und daß $[IG_1]$ die Halbgerade $[HY]$ trifft. Nunmehr schneidet jede Gerade von J, welche von $[JH]$ getrennt ist durch $[JG_1]$, $[JG]$, die Gerade $[GH]$ in einem eigentlichen Punkte. Die vier Geraden $[JH]$, $[JV]$, $[JG_1]$, $[JI]$ haben nun entweder diese oder die Reihenfolge $[JH]$, $[JG_1]$, $[JV]$, $[JI]$. Im ersten Fall liegen auf der Geraden $[JG_1]$, im zweiten auf der Geraden $[JV]$ der uneigentliche Punkt J, der eigentliche Schnittpunkt mit der Halbgeraden $[HY]$, der uneigentliche Schnittpunkt mit $[HU]$, der eigentliche Schnittpunkt mit $[HG]$ in dieser Reihenfolge, nämlich derjenigen der Punkte J, Y,



p. 276) glaubt den Satz daraus schließen zu können, daß bei einer Bewegung uneigentliche Punkte in uneigentliche, eigentliche in eigentliche übergehen; was Lie (Theorie der Transformationsgruppen III, Leipzig 1893, p. 810) mit Recht für unzulänglich erklärt. Denn es folgt daraus nur, daß jeder Grenzpunkt in einen Grenzpunkt übergeht (108), nicht daß ein Grenzpunkt einer Geraden zugleich Grenzpunkt jeder durch ihn gehenden Geraden ist. — Hilbert (Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie, Math. Ann. 1903, 57 p. 137 = Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1903, p. 107) übergeht den Beweis dieses Satzes.

U, G (nach III 4 S. 141); das widerspricht 25 S. 179. Demnach ist jeder Punkt V der Geraden $[HU]$, für den $[JV]$ die Halbgerade $[HY]$ trifft, ein eigentlicher Punkt, also U ein Grenzpunkt von $[HU]$. Nun existiert eine Affinität, in welcher die Ebene $[HIJ]$ sich selbst, die Halbgerade $[HY]$ der Halbgeraden $[HI]$ entspricht (s. Fig.). Der durch Y gehenden Geraden $\mathfrak{G}$, für welche Y kein Grenzpunkt ist, muß also eine durch I gehende Gerade $\bar{\mathfrak{G}}$ entsprechen, für welche I kein Grenzpunkt ist, von der aber jeder uneigentliche Punkt Grenzpunkt einer Geraden von H ist. Entsprechen den Punkten I, J, G, Y des ersten Systems bzw. die Punkte $\bar{I}, \bar{J}, \bar{G}, \bar{Y} = I$ des zweiten Systems, so muß in bezug auf $\bar{J}$ (resp. $\bar{I}$) einer der folgenden Fälle stattfinden: die Halbgeraden $[HI]$, $[HY]$, $[HJ]$, $[H\bar{J}]$ liegen in dieser Reihenfolge oder in dieser:

$$[HI],\ [HY],\ [H\bar{J}],\ [HJ],$$

oder in dieser:

$$[HI],\ [H\bar{J}],\ [HY],\ [HJ].$$

Ist nun erstens $\bar{\mathfrak{G}} \neq \mathfrak{G}$, so ergibt sich im ersten und zweiten Fall, daß Y resp. $([HY]\bar{\mathfrak{G}})$ kein Grenzpunkt sein könnte; und im dritten Fall, daß $\bar{J}$ resp. $([H\bar{J}]\mathfrak{G})$ kein Grenzpunkt sein könnte. Der Fall $[H\bar{J}] = [HJ]$ kann zum ersten oder zweiten, der Fall $[H\bar{J}] = [HY]$ zum zweiten oder dritten gerechnet werden; es ist nie

$$[H\bar{J}] = [HI] = [H\bar{Y}],$$

weil aus $Y \neq J$ stets $\bar{Y} \neq \bar{J}$ folgt.

Ist aber zweitens $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$, so sind die uneigentlichen Punkte $\bar{I}, \bar{J}$ von $\mathfrak{G}$ getrennt durch den eigentlichen Punkt $\bar{G}$ von $\mathfrak{G}$ und den Punkt $\bar{Y} = J$, gegen die Annahme, daß I ein Grenzpunkt von $\mathfrak{G}$ ist.

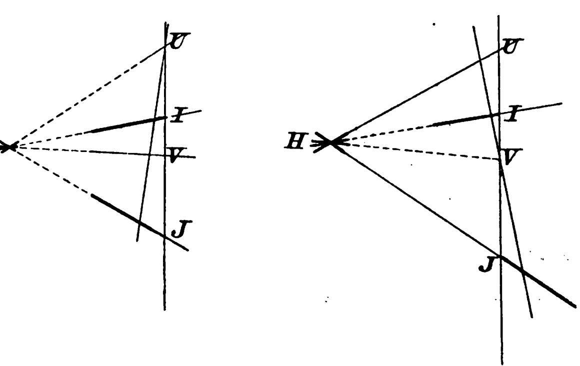
113. Satz: Zu jeder eigentlichen Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr gelegenen Punkt genau zwei Parallele; sind also in einer Ebene zwei Gerade einer dritten parallel, so brauchen sie nicht einander parallel zu sein. Sind aber zwei Halbgeraden einer dritten Halbgeraden parallel, so sind sie einander parallel.

Beweis folgt aus 109, 111.

114. Satz: Eine durch zwei Grenzpunkte I, J gehende Gerade ist eigentlich.

Beweis: Wären alle Punkte der Gerade $[IJ]$ uneigentlich, so gäbe es ein Paar uneigentlicher Punkte UV, getrennt durch IJ. Es

sei H ein eigentlicher Punkt, dann sind I, J Grenzpunkte der Geraden $[HI]$, $[HJ]$. Wir behaupten, es ist entweder U Grenzpunkt von $[HU]$ oder V Grenzpunkt von $[HV]$. Man beweist nämlich wie in 112, daß entweder durch U oder durch V Geraden gezogen werden können, welche das Geradenpaar $[HI]$, $[HJ]$ in eigentlichen, das Geradenpaar $[HU]$, $[HV]$ in dadurch getrennten uneigentlichen Punkten treffen (s. Fig.). Demnach bestände eine der beiden Klassen von Punkten, in die $[IJ]$ durch I, J zerfällt, aus lauter Grenzpunkten, was schon in 112 als unmöglich erkannt war.



115. Satz: Auf keiner Geraden liegen drei Grenzpunkte.

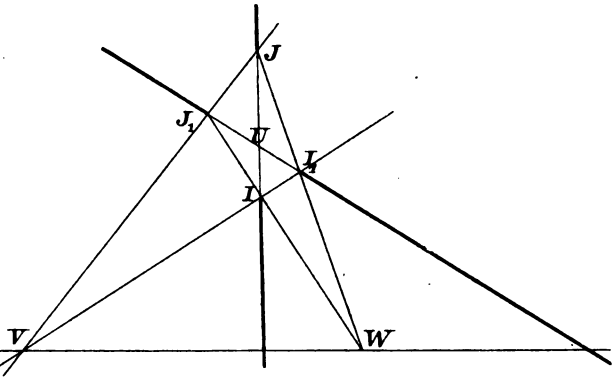
Beweis: Eine solche Gerade müßte nach 114 eigentlich sein, würde dann aber nach 108, 109 nur zwei Grenzpunkte enthalten.

116. Satz: Sind I, J, I_1, J_1 vier Grenzpunkte einer Ebene, von denen also nach 115 keine drei in einer Geraden liegen, so ist von den drei Punkten:

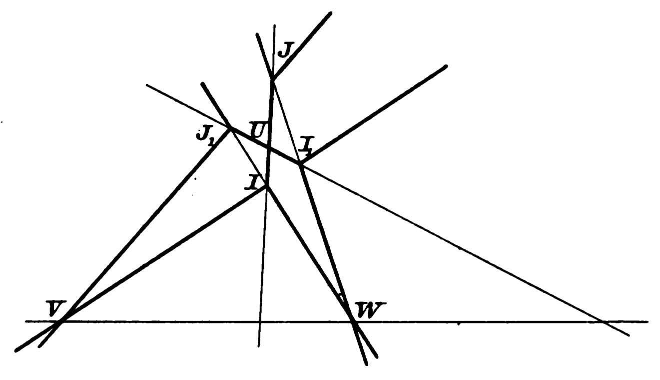
$$U = ([IJ][I_1J_1]), \quad V = ([II_1][JJ_1]), \quad W = ([IJ_1][JI_1])$$

einer eigentlich, die beiden andern uneigentlich.

Beweis: Ist erstens (s. Fig.) z. B. U uneigentlich, so können V und W nicht beide uneigentlich sein, denn sie sind harmonisch getrennt durch die Punkte $([IJ][VW])$, $([I_1J_1][VW])$, welche eigentlich sind, da sie von dem uneigentlichen Punkte U durch die Grenzpunkte I, J bezw. I_1, J_1 getrennt sind. Zweitens können nicht zwei



der drei Punkte eigentlich sein. Denn sind z. B. V und W eigentlich, so muß zunächst U uneigentlich sein. Andernfalls wären nämlich (s. Fig.) die eigentlichen Punkte V, W getrennt durch die Punkte



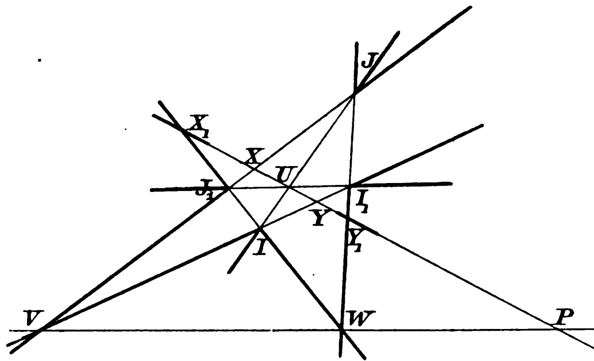
$$([IJ][VW]),$$
$$([I_1J_1][VW]),$$

welche uneigentlich sind, da sie von dem eigentlichen Punkte U durch die Grenzpunkte IJ resp. I_1J_1 getrennt sind.

Ist also jetzt U uneigentlich (s. Fig.), so sei $P \neq V, \neq W$ irgend ein Punkt von $[VW]$,

$$X = ([JJ_1][UP]), \quad Y = ([II_1][UP]),$$
$$X_1 = ([IJ_1][UP]), \quad Y_1 = ([I_1J][UP]).$$

Ist z. B. X uneigentlich, so findet die Reihenfolge VJ_1XJ statt; also auch durch Projektion von U die Reihenfolge $VIYI_1$, d. h. auch Y ist uneigentlich. Ferner ergibt sich durch Projektion von U auf $[IJ_1]$ die Reihenfolge $([UV][IJ_1]), J_1, X_1, I$, d. h. X_1 ist eigentlich, da er durch IJ_1 von dem Punkte



$$([UV][I_1J_1])$$

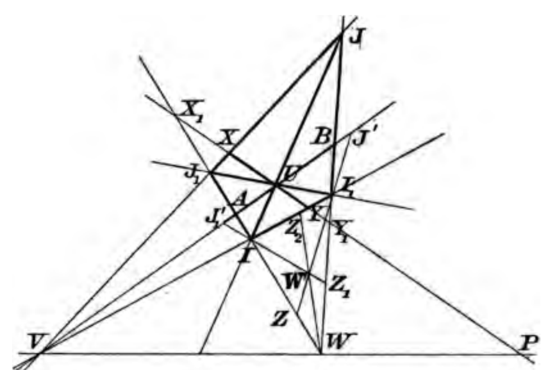
getrennt, also dem eigentlichen Punkte W nicht getrennt ist. Dann folgt noch, daß auch Y_1 eigentlich ist. Ist dagegen X eigentlich, so folgt ebenso, daß auch Y eigentlich, aber X_1, Y_1 uneigentlich sind.

Nun ist P von dem uneigentlichen Punkte U harmonisch getrennt sowohl durch das Paar XY als durch das Paar X_1Y_1, also jedenfalls durch ein eigentliches Paar, woraus folgt, daß P ein eigentlicher Punkt ist. Demnach wäre jeder Punkt von $[VW]$ eigentlich, gegen 102.

117. Satz: Durch einen uneigentlichen Punkt, der nicht Grenz-

punkt ist, gehen mehrere uneigentliche Geraden; oder durch zwei sich nicht schneidende Geraden einer Ebene kann man mehrere Paare sich nicht schneidender Ebenen legen.

Beweis (s. Fig.): Man verbinde den uneigentlichen Punkt V mit einem eigentlichen Punkt und erhalte die eigentliche Gerade mit den Grenzpunkten JJ_1; dann verbinde man V mit einem nicht auf $[JJ_1]$ gelegenen eigentlichen Punkt und erhalte die eigentliche Gerade mit den Grenzpunkten II_1. Dann ist nach 116 von den beiden Punkten



$$U = ([IJ]\,[I_1J_1]),$$
$$W = ([IJ_1]\,[I_1J])$$

einer eigentlich, der andere uneigentlich. Ist z. B. U eigentlich, W uneigentlich, so behaupten wir, daß die Gerade $[VW]$ uneigentlich ist. In der Tat, ist $P \neq V, \neq W$ ein beliebiger Punkt auf ihr, und ist

$$X = ([JJ_1]\,[UP]), \quad Y = ([II_1]\,[UP])$$
$$X_1 = ([IJ_1]\,[UP]), \quad Y_1 = ([I_1J]\,[UP]),$$

so folgt wie in 116, daß von den Paaren XY und X_1Y_1 das eine eigentlich, das andere uneigentlich ist. Da nun P von dem eigentlichen Punkte U durch jedes der Paare XY, X_1Y_1, von denen eins uneigentlich ist, getrennt wird, so muß P, also jeder Punkt der Geraden $[VW]$ uneigentlich sein.

Eine von $[VW]$ verschiedene uneigentliche Gerade $[VW']$ des Punktes V erhält man, wenn man statt der Punkte J, J_1 die Grenzpunkte J', J_1' der eigentlichen Geraden $[VU]$ verwendet, also

$$W' = ([I_1J']\,[IJ_1'])$$

setzt. Daß aber wirklich $[VW'] \neq [VW]$ ist, erkennt man wie folgt. Es sei $A = ([IJ_1]\,[UV])$, $B = ([I_1J]\,[UV])$, und $VJ_1'AUBJ'$ in dieser Folge. Ferner sei $Z = ([WI]\,[W'I_1])$, $Z_1 = ([WI_1]\,[W'I])$, $Z_2 = ([II_1]\,[WW']$. Dann ergibt die Reihenfolge $VJ_1'AU$ (mit $J_1' \neq A$) durch Projektion von I aus die Folge I_1Z_1WJ, aus der schon $Z_1 \neq W$, also $W' \neq W$ folgt. Ebenso ergibt sich die Folge $IZWJ_1$; demnach ist W' von $[JJ_1]$ getrennt durch das Tripel II_1W

und es folgt (III 12, Folg.) VZ_2 getrennt durch II_1, also sicher $Z_2 \neq V$, also W' nicht auf $[VW]$.

118. Satz: Es gibt außer der Identität keine Affinität, in welcher jeder Grenzpunkt sich selbst entspricht.

Beweis: Ist A irgend ein Punkt, kein Grenzpunkt, und sind $[IJ]$, $[I_1 J_1]$ zwei eigentliche Gerade desselben, so entsprechen in einer Affinität, in welcher die Grenzpunkte I, J, I_1, J_1 sich selbst entsprechen, auch die Geraden $[IJ]$, $[I_1 J_1]$, also auch ihr Schnittpunkt

$$A = ([IJ][I_1 J_1])$$

sich selbst; dieselbe ist also die Identität.

119. Satz: In einer eigentlichen Ebene sind die eigentlichen und uneigentlichen Geraden eines uneigentlichen Punktes so geordnet, daß nie zwei eigentliche durch zwei uneigentliche Geraden getrennt sind.

Beweis: Sind A, B eigentliche Punkte und wären die eigentlichen Geraden $[UA]$, $[UB]$ des uneigentlichen Punktes U getrennt durch die uneigentlichen Geraden $[UV]$, $[UW]$, wo V, W auf $[AB]$ liegen, so wären die eigentlichen Punkte A, B durch die uneigentlichen V, W getrennt, gegen 25.

120. Definition: Eine Gerade, die genau einen Grenzpunkt enthält, heißt „Grenzgerade".

121. Satz: Durch jeden uneigentlichen Punkt, der nicht Grenzpunkt ist, gehen in einer eigentlichen Ebene genau zwei Grenzgerade.

Beweis: Durch eine eigentliche Gerade $\mathfrak{A}$ des uneigentlichen Punktes O und eine uneigentliche Gerade $\mathfrak{U}$ werden in der Ebene $\{\mathfrak{A}\mathfrak{U}\}$ alle Geraden von O in zwei Klassen geteilt. Es sollen die mit einer bestimmten eigentlichen Geraden $\mathfrak{B}$ von O und $\{\mathfrak{A}\mathfrak{U}\}$ in derselben Klasse befindlichen eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \ldots$, die in der anderen Klasse befindlichen durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ bezeichnet werden. Dann definiere man eine Gerade $\mathfrak{G}$ und eine Gerade $\mathfrak{H}$ durch die Anordnungsbeziehungen: es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ getrennt und $\mathfrak{A}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{W}$ getrennt für alle eigentlichen Geraden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ $(\neq \mathfrak{A})$ des Punktes O und für alle uneigentlichen Geraden $\mathfrak{W}$, für welche uneigentliche Gerade $\mathfrak{W}'$ existieren, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$, resp. $\mathfrak{A}\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{W}$ getrennt sind.

Die Widerspruchlosigkeit dieser Bedingungen folgt genau wie in 105; die Existenz der Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ auf Grund der Stetigkeit wie in 107, die Eindeutigkeit derselben wie in 108, ferner wie in 106, daß diese Geraden uneigentlich sind.

Für die Gerade $\mathfrak{G}$ (z. B.) und jede uneigentliche Gerade $\mathfrak{W}$ von O gilt jetzt entweder $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ getrennt, oder es existiert keine uneigentliche Gerade $\mathfrak{W}'$, so daß

$$\mathfrak{A}\mathfrak{W}',\ \mathfrak{B}\mathfrak{W}$$

getrennt sind, d. h. es ist stets $\mathfrak{A}\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ nicht getrennt, also mit Rücksicht auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}\mathfrak{W}'$ nicht getrennt folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}'$ getrennt für jede von $\mathfrak{W}$ verschiedene Gerade $\mathfrak{W}'$. Für eine solche Gerade $\mathfrak{W}$ ist also $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ nicht getrennt, also $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{G}$ getrennt. Hieraus und aus $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}'$ getrennt folgt aber $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{W}'$ nicht getrennt für jede von $\mathfrak{W}$ verschiedene Gerade $\mathfrak{W}'$. Wäre nun $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{G}$, so gäbe es stets von $\mathfrak{W}$ verschiedene Geraden $\mathfrak{W}'$, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{W}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{W}'$ getrennt sind; denn die Reihenfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{W}\mathfrak{G}$ läßt erkennen, daß z. B. die vierte Harmonische von $\mathfrak{A}$ in bezug auf $\mathfrak{W}\mathfrak{G}$ eine solche Gerade $\mathfrak{W}'$ ist. Also ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{W}$, d. h. $\mathfrak{G}$ eine Gerade, für welche $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ getrennt sind, für jede uneigentliche Gerade $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{G}$. Die Gerade $\mathfrak{G}$ ist uneigentlich, enthält also sicher nicht zwei Grenzpunkte (114). Enthielte sie aber deren keinen, so existierten auf Grund der Stetigkeit uneigentliche Geraden $\mathfrak{G}'$ von O, für welche die Reihenfolgen $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, für alle Geraden $\mathfrak{B}$ stattfinden, da diese Bedingungen widerspruchslos sind. Demnach enthält $\mathfrak{G}$ genau einen Grenzpunkt. Dasselbe gilt für $\mathfrak{H}$.

122. Satz: Durch jeden Grenzpunkt geht in jeder eigentlichen Ebene wenigstens eine uneigentliche Gerade, also eine Grenzgerade.

Beweis: Es sei U ein uneigentlicher Punkt der eigentlichen Ebene E, in welcher der Grenzpunkt I der eigentlichen Geraden $[AI]$ liegt; und es sei $[UJ]$ die eine Grenzgerade von U, J ihr Grenzpunkt. Es gibt Affinitäten, in welchen der Punkt A sich selbst, die Halbgerade $[AI]$ der Halbgeraden $[AJ]$ entspricht. In einer solchen Affinität muß der durch J gehenden Grenzgeraden eine durch I gehende Gerade entsprechen, die mit Rücksicht auf 110 keinen weiteren Grenzpunkt außer I enthält, also eine Grenzgerade ist.

123. Definition: Ein Punkt, durch den in einer eigentlichen Ebene genau eine Grenzgerade geht, heißt „parabolisch“; ein Punkt, durch den in einer eigentlichen Ebene mehr als eine Grenzgerade geht, heißt „hyperbolisch“, ein Punkt, durch den in einer eigentlichen Ebene keine Grenzgerade geht, heißt „elliptisch“. Demnach sind nur die eigentlichen Punkte und diese in jeder Ebene elliptisch, nur die uneigentlichen Punkte und diese in jeder Ebene hyperbolisch, und die Grenzpunkte können in jeder Ebene nur parabolisch oder hyperbolisch sein.

124. Satz: Je nachdem ob ein einziger Grenzpunkt in einer einzigen eigentlichen Ebene parabolisch oder hyperbolisch ist, ist jeder Grenzpunkt in jeder eigentlichen Ebene parabolisch oder hyperbolisch.

Beweis: Es gibt Affinitäten, in welchen einem gegebenen Grenzpunkt I und einer eigentlichen Ebene E desselben ein gegebener Grenzpunkt J ($=$ oder $\neq I$) und eine eigentliche Ebene Δ desselben entspricht; in dieser muß eindeutig jeder Grenzgeraden von I eine Grenzgerade von J und umgekehrt entsprechen.

125. Satz: Die Grenzgeraden und die eigentlichen Geraden eines hyperbolischen Grenzpunktes in einer eigentlichen Ebene sind so geordnet, daß niemals zwei eigentliche Gerade durch zwei Grenzgerade getrennt werden.

Beweis wie zu 119.

126. Definition: Durch eine eigentliche Gerade $\mathfrak{A}$ des hyperbolischen Grenzpunktes O und eine Grenzgerade $\mathfrak{U}$ desselben werden in der Ebene $\{\mathfrak{A}\mathfrak{U}\}$ alle Geraden von O in zwei Klassen geteilt. Es sollen die mit einer bestimmten eigentlichen Geraden $\mathfrak{B}$ von O und $\{\mathfrak{A}\mathfrak{U}\}$ in derselben Klasse befindlichen eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \ldots$, die in der anderen Klasse befindlichen durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \mathfrak{C}'', \ldots$ bezeichnet werden. Dann definiere man eine Gerade $\mathfrak{G}$ und eine Gerade $\mathfrak{H}$ durch die Anordnungsbeziehungen: es sei $\mathfrak{A}\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ getrennt, und $\mathfrak{A}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{W}$ getrennt für alle eigentlichen Geraden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ($\neq \mathfrak{A}$) des Punktes O und für alle diejenigen Grenzgeraden $\mathfrak{W}$ desselben, für welche Grenzgeraden $\mathfrak{W}'$ existieren, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{W}$ resp. $\mathfrak{A}\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{W}$ getrennt sind. Die Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sollen die „extremen“ Grenzgeraden des hyperbolischen Punktes O in der Ebene $\{\mathfrak{A}\mathfrak{U}\}$ heißen.

127. Satz: Jeder hyperbolische Grenzpunkt hat in jeder seiner eigentlichen Ebenen genau zwei extreme Grenzgerade.

Beweis wie zu 121.

128. Satz: In einer Affinität entspricht einer extremen Grenzgeraden eine extreme Grenzgerade.

Beweis folgt daraus, daß einerseits extreme Grenzgerade durch Ordnungsbeziehungen zu Grenzgeraden und eigentlichen Geraden definiert sind, und daß andererseits Grenzgerade den Grenzgeraden, eigentliche Gerade den eigentlichen Geraden entsprechen und Ordnungsbeziehungen erhalten bleiben.

129. Satz: Jeder Grenzpunkt ist parabolisch.

Beweis: Angenommen, es ist I ein hyperbolischer Grenzpunkt, A ein eigentlicher Punkt, also auch (124) der andere Grenzpunkt J von $[AI]$ ein hyperbolischer Grenzpunkt. Es sei $A' \neq A$ ein zweiter eigentlicher Punkt von $[IJ]$, E eine Ebene von $[IJ]$. Es gibt eine Affinität, in welcher die Halbgerade $[AI]$ der Halbgeraden $[A'I]$, die Ebene E sich selbst entsprechen. Da die extremen Grenzgeraden

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}_1$ von I sich selbst entsprechen müssen (128), so wird entweder $\mathfrak{U}$ sich selbst und $\mathfrak{U}_1$ sich selbst, oder $\mathfrak{U}$ der $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_1$ der $\mathfrak{U}$ entsprechen. Bildet man also das Produkt der Affinität mit sich selbst, so erhält man in beiden Fällen eine Affinität, in welcher $\mathfrak{U}$ sich selbst und $\mathfrak{U}_1$ sich selbst entsprechen. Ebenso entsprechen dann die extremen Grenzgeraden $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1$ von J jede sich selbst; und dem A entspreche A''. Von den vier Geraden $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}_1$ gehen keine drei durch einen Punkt; denn z. B. durch $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1) = I$ geht nicht $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{V}_1$, da sonst $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{V}_1$ zwei verschiedene Grenzpunkte $I \neq J$ enthielte, und durch $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ geht nicht $\mathfrak{U}_1$ oder $\mathfrak{V}_1$, da sonst $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}$ sein müßte, gegen die Annahme, daß I und J hyperbolische Grenzpunkte sind. Aber eine ebene Affinität (Kollinearität), in welcher vier Gerade, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, sich selbst entsprechen, ist nur die Identität. Also müßte $A = A''$ sein, was nicht der Fall ist, denn aus der Reihenfolge $JAA'I$ (z. B.) folgt diese: $JA'A''I$, und aus beiden diese: $JAA'A''$, d. h. es ist A'' von A getrennt durch JA', also $A'' \neq A$.

130. Satz: Die sämtlichen Grenzgeraden eines Grenzpunktes bilden ein vollständiges ebenes Büschel.

Beweis: Es seien $[IU]$, $[IV]$ zwei Grenzgerade eines Grenzpunktes I. Wäre die Ebene $\{IUV\}$ eigentlich, so hätte der Grenzpunkt I in ihr zwei verschiedene Grenzgerade $[IU]$, $[IV]$, gegen 129. Also ist die Ebene $[IUV]$ uneigentlich und enthält außer I keinen anderen Grenzpunkt J, da sie sonst eine eigentliche Gerade $[IJ]$ enthielte. Demnach ist jede Gerade $[IW]$ derselben eine Grenzgerade. Hat nun der Grenzpunkt I in einer eigentlichen Ebene E die Grenzgerade $[IX]$, so muß $[IX] = [\mathsf{E}\{IUV\}]$ sein, da es sonst durch I zwei Grenzgerade gäbe, gegen 129.

131. Definition: Eine Ebene, die genau einen Grenzpunkt enthält, heißt Grenzebene.

132. Satz: Sind in einer eigentlichen Ebene E $[OI_0]$, $[OJ_0]$ die beiden Grenzgeraden eines uneigentlichen Punktes O, der kein Grenzpunkt ist, ferner A ein eigentlicher Punkt von $[I_0J_0]$, und I, J die Grenzpunkte von $[OA]$, so sind die Paare OA, IJ harmonisch.

Beweis: Es sei $A' \neq A$ ein eigentlicher Punkt von $[I_0J_0]$. Es gibt eine Affinität, in welcher die Halbgerade $[AI_0]$ der Halbgeraden $[A'I_0]$, die Ebene E sich selbst entspricht. In dieser entsprechen die Punkte I_0, J_0, also auch deren Grenzgeraden $[OI_0]$, $[OJ_0]$, also auch deren Schnittpunkt O sich selbst. Sind I', J' die Grenzpunkte der Geraden $[OA']$, welche der Geraden $[OA]$ entspricht, so entspricht (z. B.) I dem I', und J dem J'; also sind die Würfe

$OIAJ$ und $OI'A'J'$ gleich, also gehen $[II']$, $[JJ']$ durch einen Punkt von $[AA']$.

Bildet man das Produkt der gegebenen Affinität mit derjenigen, in welcher die Halbgerade $[AI_0]$ und die Ebene E sich selbst, aber I dem J und J dem I entsprechen, so wird in der zusammengesetzten Affinität die Halbgerade $[AI_0]$ der Halbgeraden $[A'I_0]$, die Ebene E sich selbst, der Punkt I dem J', der Punkt J dem I' entsprechen: also müssen sich auch $[IJ']$, $[I'J]$ auf $[AA']$ schneiden, woraus die Harmonie von OA, IJ folgt.

133. Satz: Sind $[I_0J_0]$, $[I_1J_1]$ zwei Grenzgerade eines eigentlichen Punktes A, so gibt es durch jeden Punkt P derselben Ebene Gerade, welche $[I_0J_0]$, $[I_1J_1]$ in eigentlichen Punkten $\neq A$ treffen.

Beweis: Liegen z. B. die Geraden

$$[PI_0],\ [PI_1],\ [PA],\ [PJ_0],\ [PJ_1]$$

in dieser Reihenfolge, so wähle man eine Gerade $[PA_0A_1]$ von $[PA]$ nicht getrennt durch $[PI_1]$, $[PJ_0]$, dann ist ihr Schnittpunkt A_0 mit $[I_0J_0]$ nicht getrennt von A durch I_0J_0, also eigentlich, und ihr Schnittpunkt A_1 mit $[I_1J_1]$ nicht getrennt von A durch I_1J_1, also auch eigentlich.

134. Satz: Die sämtlichen Grenzpunkte der Grenzgeraden eines uneigentlichen Punktes O, der kein Grenzpunkt ist, bilden den vollständigen Schnitt des Grenzovals mit einer Ebene; ist P irgend ein eigentlicher Punkt derselben, so wird das Paar OP durch das Grenzoval, d. h. durch die beiden Grenzpunkte von $[OP]$ harmonisch getrennt.

Beweis: Es sei ein eigentlicher Punkt A durch das Grenzoval harmonisch getrennt vom Punkte O. In einer Ebene E_0 durch $[OA]$ habe O die Grenzgeraden $[OI_0]$, $[OJ_0]$; dann geht $[I_0J_0]$ durch A (132). In einer zweiten Ebene E_1 durch $[OA]$ liegen die Grenzgeraden $[OI_1]$, $[OJ_1]$ und es geht $[I_1J_1]$ durch A. Es sei $[OI]$ eine fünfte Grenzgerade von O. Durch den Punkt $([OI]\{AI_0J_0\})$ lege man (133) eine Gerade $[A_0A_1]$, welche $[I_0J_0]$, $[I_1J_1]$ resp. in den eigentlichen Punkten A_0, A_1 trifft. Dann wird sowohl A_0 wie A_1 von O durch das Grenzoval harmonisch getrennt. Sind also I_2, J_2 die Grenzpunkte von $[A_0A_1]$, so sind $[OI_2]$, $[OJ_2]$, die in $\{OA_1A_2\}$ gelegenen Grenzgeraden von O. In derselben Ebene liegt aber $[OI]$, also ist I entweder $=I_2$ oder $=J_2$, also mit $I_0J_0I_1J_1$ in einer Ebene; demnach liegen alle Grenzpunkte der Grenzgeraden von O in einer Ebene. Ist J irgend ein Grenzpunkt dieser Ebene, so folgt ebenso, daß $[OJ]$ Grenzgerade ist. Ist P irgend ein eigentlicher Punkt dieser Ebene,

und zieht man $[PP_0P_1]$ mit eigentlichen Punkten P_0, P_1 auf $[I_0J_0]$, $[I_1J_1]$, so folgt, daß die Grenzpunkte von $[P_0P_1]$ zu Grenzgeraden von O gehören, daß also P von O harmonisch getrennt ist durch das Grenzoval.

135. Definition: Die zu einem uneigentlichen Punkte O, der kein Grenzpunkt ist, gehörende völlig bestimmte eigentliche Ebene der Grenzpunkte der Grenzgeraden von O heißt die „Polarebene" von O; O heißt „Pol" derselben.

136. Satz: Zu jeder eigentlichen Ebene gehört genau ein uneigentlicher Punkt als Pol.

Beweis: Angenommen zur Ebene Ω gehörten O und P als Pole. Eine eigentliche Ebene durch $[OP]$ schneide Ω in $[IJ]$ mit den Grenzpunkten I, J; dann müßten sowohl $[IO]$ als $[IP]$ Grenzgeraden von I, und sowohl $[JO]$ als $[JP]$ Grenzgeraden von J sein, was wegen 129 unmöglich ist; also ist $O = P$.

137. Satz: Ist P ein uneigentlicher (kein Grenz-) Punkt der Polarebene Ω von O, so geht die Polarebene Π von P durch O.

Beweis: Eine eigentliche Ebene E von $[OP]$ schneide Ω in $[IJP]$ mit den Grenzpunkten I, J. In E sei $[PI_1]$ die eine Grenzgerade von P; J_1 der andere Grenzpunkt von $[OI_1]$. Es ist $I_1 \neq J_1$, denn sonst $I_1 = J_1 = I$ oder $= J$, also P auf $[OI]$ oder $[OJ]$, also $= I$ oder J, was ausgeschlossen war. Hätte jetzt $[PJ_1]$ einen von J_1 verschiedenen Grenzpunkt J', so hätte $[OJ']$ einen von I_1 verschiedenen Grenzpunkt I'. Also läge $P' = ([I_1I'][J_1J'])$ auf IJ (134), müßte also mit $P = ([IJ][J_1J'])$ übereinstimmen; dann aber läge auf $[I_1P] = [I_1P']$ ein von I_1 verschiedener Grenzpunkt I', gegen die Annahme, daß $[I_1P]$ Grenzgerade ist. Demnach ist auch $[J_1P]$ Grenzgerade und die Polarebene von P geht durch I_1, J_1, also auch durch O, was zu beweisen war.

138. Definition: Die Grenzebene eines Grenzpunktes heißt dessen Polarebene; der Grenzpunkt einer Grenzebene heißt deren Pol.

139. Satz: Jeder uneigentliche oder Grenzpunkt hat genau eine Polarebene; jede eigentliche oder Grenzebene hat genau einen Pol. Liegt der Punkt P in der Polarebene Ω von O, so liegt O in der Polarebene Π von P.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt aus 134, 136, 140, der zweite Teil, falls P und O beide uneigentlich sind, aus 137. Ist aber P (in Ω) ein Grenzpunkt, O nicht, so ist $[PO]$ Grenzgerade von P, also (130) in der Grenzebene von O enthalten; also liegt O in dieser, d. h. der Polarebene von O. Ist O Grenzpunkt, P nicht, so ist (130) $[OP]$ Grenzgerade von P, mit O als Grenzpunkt, also geht P's

Polarebene Π durch O. Sind O und P Grenzpunkte, so ist für $P \neq O$ die Gerade $[OP]$ eigentlich (114), also (130) weder in der Grenzebene von P noch von O enthalten; also muß $P = O$ sein, dann fallen auch die zugehörigen Polarebenen Π, Ω zusammen.

140. Satz: Kein uneigentlicher Punkt, außer den Grenzpunkten, liegt in seiner Polarebene.

Beweis: Liegt der uneigentliche Punkt O in seiner Polarebene Ω und wird Ω von einer eigentlichen Ebene des O in $[IJ]$ geschnitten, so müßten die beiden Grenzgeraden $[OI]$, $[OJ]$ identisch, also O Grenzpunkt sein.

141. Satz: Durch jede uneigentliche Gerade $\mathfrak{H}$, die nicht Grenzgerade ist, gehen genau zwei Grenzebenen.

Beweis: Sei O ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{H}$, Ω seine Polarebene, die keine Grenzebene ist, also nicht durch O geht, also $\mathfrak{H}$ in einem von O verschiedenen Punkte $P = (\mathfrak{H}\Omega)$ schneidet; Π sei die Polarebene von P, die also durch O geht; $\mathfrak{G}$ sei $= [\Omega\Pi]$. Eine eigentliche Ebene E von $[OP]$ schneide Ω in $[I'J']$, Π in $[I''J'']$, $\mathfrak{G}$ in $G = ([I'J'][I''J''])$, harmonisch getrennt von P durch I', J', also eigentlich; also auch $\mathfrak{G}$ eigentlich. Sind I, J die Grenzpunkte von $\mathfrak{G}$, so liegen I, J in Ω und Π, also sind $[OI]$, $[OJ]$ Grenzgeraden von O und $[PI]$, $[PJ]$ Grenzgeraden von P, also (130) $\{OPI\}$, $\{OPJ\}$ Grenzebenen von $[OP] = \mathfrak{H}$, und $\{OPI\} \neq \{OPJ\}$, weil $I \neq J$, weil $\mathfrak{G}'$ keine Grenzgerade ist.

Gäbe es noch eine dritte Grenzebene $\{OPK\}$ durch $\mathfrak{H}$, so lägen erstens I, J, K auf keiner Geraden (115). Ist also $(\{IJK\}[OP]) = R$, so gingen durch R drei verschiedene Grenzgeraden $[RI]$, $[RJ]$, $[RK]$, gegen 121.

142. Definition: Sind $\{\mathfrak{H}I\}$, $\{\mathfrak{H}J\}$ die Grenzebenen einer uneigentlichen, Nicht-Grenzgeraden $\mathfrak{H}$, so heißt von den Geraden $\mathfrak{G} = [IJ]$ und $\mathfrak{H}$ jede die „Polargerade“ der anderen.

143. Satz: Zu jeder Nicht-Grenzgeraden gehört genau eine Polargerade. Die Polarebenen jedes uneigentlichen Punktes einer Nicht-Grenzgeraden gehen durch die Polargerade derselben; die Pole jeder eigentlichen oder Grenzebene einer Nicht-Grenzgeraden liegen auf der Polargeraden derselben.

Beweis: Ist $\mathfrak{H}$ eine uneigentliche Gerade, so ergibt sich ihre Polargerade $\mathfrak{G}$ eindeutig nach 141, 142, indem man die Grenzpunkte I, J ihrer beiden Grenzebenen $\{\mathfrak{H}I\}$, $\{\mathfrak{H}J\}$ verbindet. — Ist $\mathfrak{G}$ eine eigentliche Gerade, I, J ihre Grenzpunkte, $\mathfrak{H}$ die Schnittgerade der Grenzebenen von I und J, so ist $\mathfrak{H}$ die hierdurch eindeutig bestimmte Polargerade von $\mathfrak{G}$. Ein Punkt P auf $\mathfrak{H}$ hat die Grenzgeraden $[PI]$,

$[PJ]$, (nach 130), also geht seine Polarebene durch I und J, also durch $[IJ] = \mathfrak{G}$.

Eine eigentliche oder Grenzebene von $\mathfrak{H}$ enthält alle Punkte von $\mathfrak{H}$, also gehen deren Polarebenen, also deren Schnittgerade $\mathfrak{G}$ durch den Pol von $\mathfrak{H}$.

Ist $\mathfrak{H} = [OP]$, und Ω, Π die Polarebenen von O, P, also $\mathfrak{G} = [\Omega\Pi]$, so liegt jeder uneigentliche Punkt von $\mathfrak{G}$ auf Ω und Π, also geht seine Polarebene durch O und P, also durch $[OP] = \mathfrak{H}$.

Jede eigentliche oder Grenzebene von $\mathfrak{G}$ enthält Punkte von $\mathfrak{G}$, deren Polarebenen durch $\mathfrak{H}$ gehen; also liegt der Pol einer solchen Ebene von $\mathfrak{G}$ auf der Schnittgeraden $\mathfrak{H}$ dieser Polarebenen.

144. Satz: Schneiden sich zwei Nicht-Grenzgerade, so schneiden sich ihre Polargeraden.

Beweis: Seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Polargeraden von $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ des Punktes $(\mathfrak{G}'\mathfrak{H}') = P$, so ist P sowohl von $([\{P\mathfrak{G}\}\{P\mathfrak{H}\}]\mathfrak{G})$ als von $([\{P\mathfrak{G}\}\{P\mathfrak{H}\}]\mathfrak{H})$ harmonisch getrennt durch das Grenzoval, also diese beiden Punkte identisch, d. h. es existiert ein Schnittpunkt $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$.

145. Satz: Die Polarebenen aller uneigentlichen Punkte und die Polargeraden aller Nicht-Grenzgeraden einer Ebene gehen durch einen Punkt; die Pole aller eigentlichen und Grenzebenen und die Polargeraden aller Nicht-Grenzgeraden eines Punktes liegen auf einer Ebene.

Beweis: Für die uneigentlichen Punkte und Nicht-Grenzgeraden einer eigentlichen oder Grenzebene, und für die eigentlichen und Grenzebenen und die Nicht-Grenzgeraden eines uneigentlichen Punktes folgt der Satz aus 137, 139, 143.

Nunmehr seien A, B, C, D vier Punkte einer uneigentlichen Nicht-Grenzebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und A, B, Γ, Δ ihre Polarebenen, von denen also nicht drei durch eine Gerade gehen. Da sich die sechs Geraden $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$, $[CD]$, deren keine eine Grenzgerade ist, paarweis schneiden, findet dasselbe für die sechs Geraden $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{A}\Gamma]$, $[\mathrm{A}\Delta]$, $[\mathrm{B}\Gamma]$, $[\mathrm{B}\Delta]$, $[\Gamma\Delta]$ statt. Nun liegen z. B. $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{A}\Gamma]$, $[\mathrm{B}\Gamma]$ in keiner Ebene, also müssen $[\mathrm{A}\Delta]$, $[\mathrm{B}\Delta]$, $[\Gamma\Delta]$ durch deren Schnittpunkt $(\mathrm{AB}\Gamma)$ gehen; durch diesen gehen also die Polarebenen A, B, Γ, Δ der Punkte A, B, C, D und die Polargeraden $[\mathrm{AB}]$ usw. der Geraden $[AB]$ usw. Umgekehrt seien A, B, Γ, Δ vier Ebenen eines eigentlichen Punktes, von denen keine drei durch eine Gerade gehen, und A, B, C, D ihre Pole, von denen also keine drei in einer Geraden liegen. Da sich die sechs Geraden

$$[\mathrm{AB}],\ [\mathrm{A}\Gamma],\ [\mathrm{A}\Delta],\ [\mathrm{B}\Gamma],\ [\mathrm{B}\Delta],\ [\Gamma\Delta],$$

deren keine eine Grenzgerade ist, paarweis schneiden, findet dasselbe für die sechs Geraden

$$[AB],\ [AC],\ [AD],\ [BC],\ [BD],\ [CD]$$

statt. Nun gehen z. B. $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ durch keinen Punkt, also müssen $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ in deren Ebene $\{ABC\}$ liegen; in dieser liegen also die Pole A, B, C, D der Ebenen A, B, Γ, Δ und die Polargeraden $[AB]$ usw. der Geraden $[\mathsf{AB}]$ usw.

146. Satz: Die Polarebenen der Punkte P einer Grenzgeraden $[PI]$ schneiden sich in einer anderen Grenzgeraden $[OI]$ des Punktes I; die Pole der Ebenen der Grenzgeraden $[PI]$ liegen auf derselben Grenzgeraden $[OI]$ des Punktes I.

Beweis: Es sei Π die Polarebene des Punktes $P \neq I$ der Grenzgeraden $[PI]$; dieselbe geht durch I und schneide die Grenzebene von I in der Grenzgeraden $[OI]$. Ω sei die Polarebene von O; dieselbe geht durch P und I, weil O in den Polarebenen von P und I liegt. Jeder Punkt von $[PI]$ liegt in den Polarebenen von I und O, also geht seine Polarebene durch $[OI]$; jede Ebene von $[PI]$ geht durch P und I, hat also ihren Pol auf den Polarebenen von P und I, also auf $[OI]$. Wäre $[OI] = [PI]$, ginge also Π durch P, so wäre P ein Grenzpunkt, also $[PI]$ eigentlich (114), gegen die Annahme.

147. Definition: Der Schnittpunkt aller Polarebenen der Punkte einer uneigentlichen, Nicht-Grenzebene heißt der Pol dieser Ebene. Die Verbindungsebene aller Pole der Ebenen eines eigentlichen Punktes heißt die Polarebene dieses Punktes. Die Schnittgerade aller Polarebenen der Punkte einer Grenzgeraden oder die Verbindungsgerade aller Pole der Ebenen einer Grenzgeraden heißt ihre polare Grenzgerade.

148. Satz: Den Punkten, Geraden, Ebenen sind eindeutig ihre Polaren, Polargeraden, Polarebenen so zugeordnet, daß koinzidierenden Elementen koinzidierende Elemente entsprechen.

Beweis ist in 136 bis 146 enthalten.

149. Satz: Die im vorstehenden entwickelte Polarentheorie kann für die Ebene allein entwickelt werden, wenn und nur wenn in ihr der Desarguessche Satz gilt.

Beweis: Gilt der Desarguessche Satz, so ist die ebene Geometrie Schnitt einer räumlichen, also die ebene Polarentheorie als Schnitt der dann zu entwickelnden räumlichen abzuleiten. Gilt der Desarguessche Satz nicht, so gilt der ebene Schnitt des Satzes 148 nicht. Man definiere nämlich als eigentliche Punkte der Nicht-Desarguesschen

Geometrie (II 59 S. 68) nur die im Innern des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ liegenden, die Polaren von uneigentlichen Punkten und die Pole von eigentlichen und Grenzgeraden wie gewöhnlich, dann gelten offenbar die Sätze: Die Pole aller eigentlichen und Grenzgeraden eines uneigentlichen Punktes liegen auf einer Geraden der Polare des Punktes; die Polaren aller uneigentlichen Punkte einer eigentlichen oder Grenzgeraden gehen durch einen Punkt, den Pol der Geraden. Aber es gelten nicht diese Sätze für beliebige Punkte und Geraden. Sind nämlich (x_h, y_h) $(h = 0, 1, 2)$ drei uneigentliche Punkte in einer Geraden, so gehen zwar ihre wirklichen Polaren

$$xx_h + yy_h = 1, \qquad (h = 0, 1, 2)$$

aber ihre „Nicht-Desarguesschen" Polaren

$$\lambda_{p_h}(x^2 + y^2 - 1) = \frac{xx_h + yy_h - 1}{\sqrt{x_h^2 + y_h^2}} \qquad (h = 0, 1, 2)$$

im allgemeinen nur für die ausgeschlossene Wahl $\lambda_p = p \cdot \text{const.}$ durch einen Punkt.

150. Satz: Nach Einführung von Koordinaten genügen die Koordinaten der Grenzpunkte einer homogenen Gleichung zweiten Grades, die immer durch Koordinatentransformation auf die Form gebracht werden kann:

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Für einen eigentlichen Punkt ist dann

$$x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

für einen uneigentlichen Nicht-Grenzpunkt

$$x_0^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Beweis: Sind x_0, x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines Punktes, $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ diejenigen seiner Polarebene, so findet (vgl. II 80 S. 98) die reziproke Kollinearität 142 ihren Ausdruck in einer linearen Transformation:

$$\xi_h = \sum_k a_{hk} x_k. \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

mit nicht verschwindender Determinante $|a_{hk}|$. Die Gleichung der Polarebene von (x_0, x_1, x_2, x_3) wird also:

$$\sum_{h,k} a_{hk} y_h x_k = 0, \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

wenn y_0, y_1, y_2, y_3 irgend ein Punkt derselben ist. Die Polarebene des Punktes (y_0, y_1, y_2, y_3) wird demnach

$$\sum_{h,k} a_{hk} z_h y_k = 0; \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

da dieselbe den Punkt (x_0, x_1, x_2, x_3) enthalten soll, ist auch

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h y_k = 0. \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

Die Beziehung zwischen zwei Punkten, von denen jeder in der Polarebene des anderen liegt, kann also in jeder der beiden Formen

$$\sum a_{hk} x_h y_k = 0$$
$$\sum a_{kh} x_h y_k = 0$$

geschrieben werden, woraus noch

$$\sum_{h,k} (a_{hk} - a_{kh})\,(x_h y_k - x_k y_h) = 0$$

folgt. Wählt man nun in einer Ebene E zwei verschiedene Punkte $P_1 = (x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, $P_2 = (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ und in E und der Polarebene von P_1 drei unter sich und von P_1 verschiedene Punkte

$$Q_i = (y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ebenso in E und der Polarebene von P_2 drei unter sich und von P_2 verschiedene Punkte:

$$Q_i = (y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}), \qquad (i = 4, 5, 6)$$

so müssen die sechs Gleichungen

$$\sum_{h,k} (a_{hk} - a_{kh}) \cdot (x_h^{(j)} y_k^{(i)} - x_k^{(j)} y_h^{(i)}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, & i = 1, 2, 3 \\ j = 2, & i = 4, 5, 6 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein.

Die Determinante der Koeffizienten dieser Gleichungen ist von Null verschieden. Denn bildet man ihr Quadrat durch zeilenweises Multiplizieren, so stehen in der Diagonale die Quadratsummen:

$$\sum_{h,k} (x_h^{(j)} y_k^{(i)} - x_k^{(j)} y_h^{(i)})^2,$$

deren Verschwinden $P_j = Q_i$ bedeutet, also nicht eintritt; dagegen sind alle übrigen Glieder der Determinante Null; denn es wird z. B.

$$\sum_{h,k} (x_h^{(1)} y_k^{(1)} - x_k^{(1)} y_h^{(1)})\,(x_h^{(2)} y_k^{(4)} - x_k^{(2)} y_h^{(4)}) = \begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ y_0^{(1)} & y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & y_3^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ y_0^{(4)} & y_1^{(4)} & y_2^{(4)} & y_3^{(4)} \end{vmatrix} = 0,$$

da P_1, P_2, Q_1, Q_4 in einer Ebene liegen.*) Also folgt

$$a_{hk} = a_{kh}, \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

d. h. die bilineare Form

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h y_k \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

ist symmetrisch.

Die Grenzpunkte sind diejenigen Punkte, die in ihren Polarebenen liegen, die also der quadratischen Gleichung genügen:

$$\sum_{h,k} a_{hk} x_h x_k = 0. \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

Eine solche Gleichung mit nicht verschwindender Determinante $|a_{hk}|$ läßt sich bekanntlich durch lineare Koordinatentransformation auf eine der folgenden Formen bringen:**)

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

von denen die linksstehende wegen 115 ausgeschlossen ist, da sie gerade Linien enthält, und die rechtsstehende wegen 107 ausgeschlossen ist, da sie keinen reellen Punkt enthält. Demnach bleibt als Gleichung des Grenzovals nur die Gleichung übrig:

$$x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Ein Nicht-Grenzpunkt (x_0, x_1, x_2, x_3) ist uneigentlich oder eigentlich, je nachdem ob in seiner Polarebene

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

ein Grenzpunkt (y_0, y_1, y_2, y_3) liegt oder nicht. Die Elimination von y_0 aus den beiden Gleichungen

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$
$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

gibt für y_1, y_2, y_3 die quadratische Gleichung

$$(x_1^2 - x_0^2) y_1^2 + (x_2^2 - x_0^2) y_2^2 + (x_3^2 - x_0^2) y_3^2$$
$$+ 2x_2 x_3 \cdot y_2 y_3 + 2x_1 x_3 \cdot y_1 y_3 + 2x_1 x_2 \cdot y_1 y_2 = 0,$$

welche bekanntlich definit ist, d. h. durch keine reellen Werte y_1,

*) Vgl. z. B. Baltzer, Determinanten (Leipzig 1870) p. 33, 197.

**) Vgl. z. B. Jacobi, Crelles Journal 53 (1857) p. 265 = Werke 3 p. 583.

y_2, y_3 außer $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ befriedigt wird, wenn jede der „Hauptsubdiskriminanten“ zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x_i^2 - x_0^2 & x_i x_j \\ x_i x_j & x_j^2 - x_0^2 \end{vmatrix} = x_0^2(x_0^2 - x_i^2 - x_j^2) \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

und jedes der Produkte

$$(x_i^2 - x_0^2)\begin{vmatrix} x_1^2 - x_0^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_1 x_2 & x_2^2 - x_0^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_3^2 - x_0^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_i^2 - x_0^2)\, x_0^4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

der Diskriminante mit einer der Hauptsubdiskriminanten erster Ordnung positiv ist; andernfalls ist die Form indefinit, d. h. sie kann durch reelle Werte von y_1, y_2, y_3, die nicht alle Null sind, den Wert Null annehmen. Ist nun erstens

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 < 0,$$

so folgt auch

$$x_i^2 + x_j^2 - x_0^2 < 0$$
$$x_i^2 - x_0^2 < 0; \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

demnach ist die quadratische Form der y_1, y_2, y_3 definit, sie wird also gleich Null nur für $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, welcher Punkt der Gleichung des Grenzovals

$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

nicht genügt, da nicht zugleich $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ sein kann. Demnach sind die Punkte (x_0, x_1, x_2, x_3), für welche

$$x_0^2 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ist, eigentliche Punkte.

Ist zweitens

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 > 0,$$

so ist entweder

$$x_i^2 - x_0^2 > 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

also auch

$$x_i^2 + x_j^2 - x_0^2 = (x_i^2 - x_0^2) + (x_j^2 - x_0^2) + x_0^2 > 0,$$

oder es ist irgend eine der Größen

$$x_i^2 - x_0^2 < 0,$$

also jedenfalls eine der Bedingungen des Definitseins nicht erfüllt, also die Gleichung für y_1, y_2, y_3 durch reelle Werte zu befriedigen,

die nicht alle Null sind. Zu irgend einem solchen Wertsystem für y_1, y_2, y_3 ergibt sich y_0 reell aus

$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 > 0$$

(s. I 147 S. 47), so daß (y_0, y_1, y_2, y_3) ein Grenzpunkt ist. Demnach sind die Punkte (x_0, x_1, x_2, x_3), für welche

$$x_0^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ist, uneigentliche Punkte.

151. Definitionen: Figuren heißen kongruent ($\cong$), wenn es eine Affinität gibt, in der sie einander entsprechen. Ein Paar eigentlicher Punkte A, B heißt eine Strecke AB. Die Punkte A und B heißen Anfangs- und Endpunkt der Strecke AB. Mit $AB]$ wird diejenige Halbgerade des Punktes A bezeichnet, welche den Punkt B enthält. Sind I, J die Grenzpunkte der Geraden $[AB]$ und AI, BJ getrennt, so heißt I der Grenzpunkt der Halbgeraden $AB]$.

152. Satz: Sind zwei Figuren einer dritten kongruent, so sind sie einander kongruent.

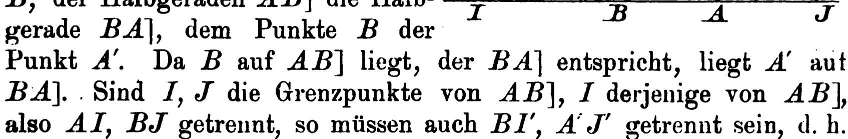
Beweis: Das Produkt der Affinität, in welcher die erste Figur der dritten, und der Affinität, in welcher die dritte Figur der zweiten entspricht, ist eine Affinität, in welcher die erste Figur der zweiten entspricht.

153. Satz: Zu jeder Strecke AB gibt es auf jeder Halbgeraden $A'X]$ genau eine ihr kongruente Strecke $A'B'$.

Beweis: In einer Affinität, in welcher der Punkt A dem Punkte A', die Halbgerade $AB]$ der Halbgeraden $A'X]$ entspricht, entspreche dem Punkte B der Punkt B'. Dann ist nach Definition $A'B' \cong AB$; aber es ist zu zeigen, daß keine andere Affinität statt B' einen Punkt $B'' \neq B'$ ergibt. Sind I, J die Grenzpunkte der Geraden $[A'B']$, so müßten die Würfe $A'B'IJ$ und $A'B''IJ$ gleich sein, woraus $B'' = B'$ folgt.

154. Satz: Es ist Strecke $AB \cong BA$.

Beweis: In einer Affinität entspreche dem Punkte A der Punkt B, der Halbgeraden $AB]$ die Halbgerade $BA]$, dem Punkte B der Punkt A'. Da B auf $AB]$ liegt, der $BA]$ entspricht, liegt A' auf $BA]$. Sind I, J die Grenzpunkte von $AB]$, I derjenige von $AB]$, also AI, BJ getrennt, so müssen auch BI', $A'J'$ getrennt sein, d. h.



I' der Grenzpunkt von $BA'] = BA]$ sein, d. h. da BJ, AI getrennt sind, also J der Grenzpunkt von $BA]$ ist, so muß $I' = J$, also auch $J' = I$ sein. Nun sind die Würfe $ABIJ$ und $BA'JI$ einander gleich, aus denen $A = A'$ folgt, da $ABIJ = BAJI$ ist. Um letzteres zu zeigen, sei P ein beliebiger Punkt nicht auf $[AB]$, Q ein beliebiger Punkt auf $[PA]$, $\neq A$ und $\neq P$, und es sei $L = ([PI][QB])$, $M = ([PI][QB])$, $N = ([QJ][PB])$: dann ist (s. Fig. S. 225):

$$ABIJ \underset{Q}{\overline{\wedge}} PMIL \underset{B}{\overline{\wedge}} NQJL \underset{P}{\overline{\wedge}} BAJI,$$

also

$$ABIJ = BAJI.$$

155. Definition: Kongruente Strecken heißen gleich $(=)$. Die Strecke AB heißt kleiner $(<)$ als die Strecke AC, und AC größer $(>)$ als BC, wenn B zwischen A und C liegt. Diese Definitionen sind zulässig, denn es bestehen die Sätze 156, 157.

156. Satz: Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis folgt aus 152, 155.

157. Satz: Zwischen irgend zwei Strecken PQ, $P'Q'$ besteht eine und nur eine der drei Beziehungen

$$PQ = P'Q', \quad PQ > P'Q', \quad PQ < P'Q'$$

und es folgt aus

$$PQ < P'Q', \quad P'Q' < P''Q''$$

stets

$$PQ < P''Q''.$$

Beweis: Es sei $AX]$ eine beliebige Halbgerade und $AB = PQ$, $AC = P'Q'$, B und C auf der Halbgeraden $AX]$. Dann ist nie A zwischen B, C, also entweder $B = C$, oder B zwischen A, C, oder C zwischen A, B. Im ersten Fall setze man $PQ = P'Q'$, im zweiten $PQ < P'Q'$, im dritten $PQ > P'Q'$. Es ist zu zeigen, daß diese Festsetzung von der Wahl der Halbgeraden $AX]$ unabhängig ist. Wären auf einer anderen Halbgeraden $A'X']$ die Strecken $A'B' = PQ$, $A'C' = P'Q'$, so wäre auch (156) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. In einer Affinität, in welcher dem Punkte A der Punkt A', der Halbgeraden $AX]$ die Halbgerade $A'X']$ entspricht, entspricht wegen $AB = A'B'$ und $AC = A'C'$ (nach 153) auch dem Punkte B der Punkt B', dem Punkte C der Punkt C'. Ist nun erstens $AB = AC$, also $B = C$, so folgt $A'B' = AB = AC = A'C'$.

Ist zweitens z. B. B zwischen AC, also AC, BU getrennt, wenn U irgend ein uneigentlicher Punkt von $[AB]$ ist, so ergibt eine Af-

finität, in welcher A, B, C, U den A', B', C', U' entsprechen, daß auch $A'C'$, $B'U'$ getrennt sind, d. h. B' zwischen A', C' liegt, d. h. $PQ < P'Q'$ ist.

Ist noch $P''Q'' = AD$ auf derselben Halbgeraden, so folgen aus $PQ < P'Q'$, $P'Q' < P''Q''$ die Reihenfolgen $ABCU$, $ACDU$ und aus diesen (nach III 14 S. 147) die Reihenfolge $ABDU$, d. h. B zwischen A, D, d. h. $PQ < P''Q''$, was zu beweisen war.

158. Definition: Ist $PQ = AB$, $RS = BC$ und B zwischen A und C, so heißt AC die Summe der Strecken PQ, RS. Diese Definition ist zulässig, da sie unabhängig von der Wahl der Halbgeraden $AB]$ ist; denn es besteht der Satz:

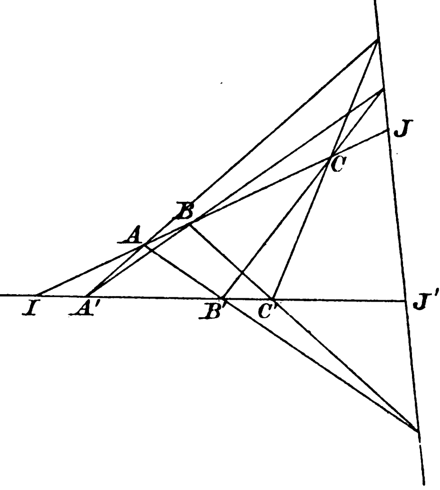
159. Satz: Summen resp. gleicher Strecken sind gleiche Strecken.

Beweis: Sei $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, ferner B zwischen A, C, und B' zwischen A', C'. In einer Affinität, in welcher dem Punkte B der Punkt B', der Halbgeraden $BA]$ die Halbgerade $B'A']$, der Halbgeraden $BC]$ die Halbgerade $B'C']$ entspricht, wird wegen $BA = B'A'$, $BC = B'C'$ (nach 153) dem Punkte A der Punkt A', dem Punkte C der Punkt C' entsprechen, also $A'C' = AC$ sein, was zu beweisen war.

160. Satz: Die Strecken bilden eine linear geordnete Gruppe, deren Komposition assoziativ und, falls der Pascalsche Satz gilt, kommutativ ist; die Strecken AA und keine anderen sind als Null anzusehen.

Beweis folgt aus den vorstehenden Sätzen bis auf die Gültigkeit des assoziativen und des kommutativen Gesetzes. Das assoziative Gesetz folgt aus:

$$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD = AB + BD = AB + (BC + CD),$$



das kommutative Gesetz aus folgendem. Sei $AB = B'C'$, $BC = A'B'$ (s. Fig.), B zwischen A, C, und B' zwischen A', C'; $([AB][A'B']) = I$ ein Grenzpunkt, J der andere Grenzpunkt von $[AB]$, J' der andere Grenzpunkt von $[A'B']$. Aus $AB = B'C'$ folgt $IABJ = IB'C'J'$ also $([AB'][BC'])$ auf $[JJ']$; aus $BC = A'B'$ folgt $IBCJ = IA'B'J'$,

also $[A'B][B'C]$ auf $[JJ']$; also, wenn und nur wenn der Pascalsche Satz gilt: $[AA'][CC']$ auf $[JJ']$, d. h. $IACJ = IA'C'J'$, d. h. $AC = A'C'$, also

$$AB \dotplus BC = AC = A'C' = A'B' \dotplus B'C' = BC \dotplus AB,$$

was zu beweisen war.

Aus $AB \dotplus BC = AB$ folgt $AC = AB$, also $C = B$, d. h. nur die Strecken BB lassen als Summanden eine Summe ungeändert, sind also als Null anzusehen. Es ist $AA = BB$ nach Definition 155. Aus $AB \dotplus BX = AC$ folgt $AX = AC$, also eindeutig $X = C$.

Daß die Addition der Strecken AB mit der Multiplikation der Würfe $ABIJ$ übereinstimmt, braucht kaum hervorgehoben zu werden. Infolgedessen können die Strecken AB als Logarithmen der Würfe $ABIJ$ angesehen werden.

161. Definitionen: Zwei Halbgerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eines Punktes heißen ein Winkel. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen Anfangs- und Endschenkel, $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ sein Scheitel, $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$ seine Ebene.

Sind $\mathfrak{A} = AI]$, $\mathfrak{A}' = AJ]$ zwei Halbgeraden einer Geraden, und $\mathfrak{B} = AI']$, $\mathfrak{B}' = AJ']$ zwei Halbgeraden einer Geraden von A, so heißt der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ ein gestreckter, die Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ heißen Scheitelwinkel, die Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}'$ heißen Nebenwinkel. Mit $\mathfrak{A}B\}$ resp. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$ wird diejenige Halbebene der Geraden $\mathfrak{A}$ bezeichnet, in welcher der Punkt B resp. die Halbgerade $\mathfrak{B}$ liegt.

162. Satz: Zu jedem Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gibt es für jeden Anfangsschenkel $\mathfrak{A}'$ und jeden Scheitel C' in jeder Ebene von $\mathfrak{A}'$ genau einen kongruenten Winkel $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, wenn noch die Halbebene $\mathfrak{A}'X\}$ gegeben ist, in der der Endschenkel $\mathfrak{B}'$ liegen soll.

Beweis: In derjenigen Affinität, in welcher dem Punkte $C = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ der Punkt C', der Halbgeraden $\mathfrak{A}$ die Halbgerade $\mathfrak{A}'$, der Halbebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$ die Halbebene $\mathfrak{A}'X\}$ entspricht, entspreche der Halbgeraden $\mathfrak{B}$ die Halbgerade $\mathfrak{B}'$, dann ist nach Definition Winkel $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Ergäbe eine zweite Affinität $\mathfrak{B}'' \neq \mathfrak{B}'$, so gäbe es auch eine Affinität, in welcher der Punkt C' sich selbst, die Halbgerade $\mathfrak{A}'$ sich selbst die Halbebene $\mathfrak{A}'X\}$ sich selbst, aber die Halbgerade $\mathfrak{B}'$ der Halbgeraden $\mathfrak{B}''$ entspräche. Sind nun I, J die Grenzpunkte, O der Pol von $\mathfrak{A}'$, I' der Grenzpunkt der Halbgeraden $\mathfrak{B}'$, und J'' der Grenzpunkt der Halbgeraden $\mathfrak{B}''$, so wäre der Wurf der vier Geraden $[OI]$, $[OJ]$, $[OC']$, $[OI']$, gleich dem Wurf der vier entsprechenden Geraden: $[OI]$, $[OJ]$, $[OC']$, $[OI'']$, woraus $[OI''] = [OI']$ folgen würde; also müßte entweder $I'' = I'$ sein, oder es wären I', I'' die Grenzpunkte

er Geraden $[OC']$; dann aber läge von den Halbgeraden $\mathfrak{B}' = [C'I']$, $\mathfrak{B}'' = [C'I'']$ nur eine in der Halbebene $\mathfrak{A}'X\}$.

163. Satz: Alle gestreckten Winkel sind kongruent.

Beweis: Sind $CA] = \mathfrak{B}$, $CB] = \mathfrak{A}$ zwei Halbgeraden einer Geaden $[AB]$ der Ebene E, $C'A'] = \mathfrak{B}'$, $C'B'] = \mathfrak{A}'$ zwei Halbgeraden iner Geraden $[A'B'] =$ oder $\neq [AB]$ der Ebene $\mathsf{E}' =$ oder $\neq \mathsf{E}$, so ibt es eine Affinität, in welcher der Punkt C dem Punkte C', die erade $\mathfrak{A}$ der Geraden $\mathfrak{A}'$, die Gerade $\mathfrak{B}$ der Geraden $\mathfrak{B}'$, die Ebene der Ebene E' entspricht; also ist Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$.

164. Satz: Sind in zwei Dreiecken ABC, $A'B'C'$, die Seiten A, CB resp. gleich den Seiten $C'A'$, $C'B'$ und der Winkel der albgeraden $AC] = \mathfrak{B}$, $BC] = \mathfrak{A}$ kongruent dem Winkel der Halberaden $A'C'] = \mathfrak{B}'$, $B'C'] = \mathfrak{A}'$, so sind die beiden Dreiecke konruent.

Beweis: In einer Affinität, in welcher dem Punkte C der Punkt $'$, der Halbgeraden $\mathfrak{A}$ die Halbgerade $\mathfrak{A}'$, der Halbebene $\mathfrak{A}A\}$ die albebene $\mathfrak{A}'A']$ entspricht, entspricht wegen $CB = C'B'$ nach 153 em Punkte B der Punkt B', und wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ nach 162 der albgeraden $\mathfrak{B}$ die Halbgerade $\mathfrak{B}'$, also wegen $CA = C'A'$ nach 153 em Punkte A der Punkt A', also überhaupt dem Dreiecke ABC as Dreieck $A'B'C'$, d. h. (nach 151) es ist $ABC \cong A'B'C'$.

165. Satz: Die beiden Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ sind kongruent.

Beweis: Es sei $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = C$, $CA = CB$, A auf $\mathfrak{B}$, B auf $\mathfrak{A}$. an bestimme die Halbgerade $\mathfrak{A}'$ on B aus $\llcorner BA]\mathfrak{A}' = AB]\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ $[AB]\mathfrak{A}\}$; dann C' auf $\mathfrak{A}'$ aus $C' = AC$. Dann ist Dreieck ABC $\cong BAC'$, denn es sind $AC = BC'$, $B = BA$ (nach 154), und die Vinkel zwischen diesen Seitenpaaren ongruent. Also ist $C'A = CB =$ $A = C'B$, also, wie vermittelst 164 u zeigen ist, $C = C'$, also $ABC \cong$ AC, also Winkel $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

166. Satz: Scheitelwinkel sind ongruent (s. Fig.).

Beweis: Sei $C = ([II'][JJ'])$, $O = ([IJ'][JI'])$, $P = ([IJ][I'J'])$, $_0$, J_0 die Grenzpunkte von $[CP]$, $Q = ([IJ'][CP])$, $R = ([JI'][CP])$, $= CI]$, $\mathfrak{B} = CJ]$, $\mathfrak{A}' = CI']$, $\mathfrak{B}' = CJ']$. In einer Affinität, in elcher C sich selbst, $[CP]$ sich selbst, die Halbebene $[CP]I\}$ der albebene $[CP]I'\}$ entspricht, entspricht der Pol O von $[CP]$ sich

selbst, I_0, J_0 sich selbst, also wegen $I_0 J_0 P Q = I_0 J_0 P Q'$, Q und ebenso R sich selbst, also $[OQ]=[IJ']$ und $[OR]=[JI']$ sich selbst, also I dem J' und J dem I', also ist Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$, also (wegen 165) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$.

167. Definition: Kongruente Winkel heißen **gleich**. Der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ heißt **kleiner** als der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ **größer** als $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wenn der Punkt $(\mathfrak{B}[IJ])$ eigentlich ist; I, J Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$. Jeder nicht gestreckte Winkel heißt kleiner als jeder gestreckte.

168. Satz: Sind zwei Winkel einem dritten gleich, so sind sie einander gleich.

Beweis folgt aus 152, 167.

169. Satz: Zwischen irgend zwei Winkeln $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$ besteht eine und nur eine der drei Beziehungen:

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}'\mathfrak{H}', \quad \mathfrak{G}\mathfrak{H} > \mathfrak{G}'\mathfrak{H}', \quad \mathfrak{G}\mathfrak{H} < \mathfrak{G}'\mathfrak{H}',$$

und es folgt aus

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H} < \mathfrak{G}'\mathfrak{H}', \quad \mathfrak{G}'\mathfrak{H}' < \mathfrak{G}''\mathfrak{H}''$$

stets

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H} < \mathfrak{G}''\mathfrak{H}''.$$

Beweis: Es sei (162) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{G}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}' = \mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$; ist jetzt $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so setzen wir $\mathfrak{G}\mathfrak{H} = \mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$; ist $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ eine Halbgerade des Winkels $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, so setzen wir $\mathfrak{G}\mathfrak{H} < \mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$; ist $\mathfrak{C}$ eine Halbgerade des Winkels $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so setzen wir $\mathfrak{G}\mathfrak{H} > \mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$. Die beiden letzten Fälle können nie zugleich eintreten. Denn sei $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = O$, ferner I_0, I, J die Grenzpunkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $D = (\mathfrak{B}[I_0 J])$, $E = (\mathfrak{C}[I_0 I])$, $[UV]$ die Grenzgerade von I_0, U auf $\mathfrak{B}$ und V auf $\mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, so folgt, weil D eigentlich ist, die Reihenfolge $ODIU$ und daraus diese $OJEV$, also ist E uneigentlich, also $\mathfrak{A}\mathfrak{C} > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und umgekehrt.

Ist auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{G}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' = \mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\}$, so folgt (168) $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$. In einer Affinität, in welcher dem Punkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ der Punkt $(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$, der Halbgeraden $\mathfrak{A}$ die Halbgerade $\mathfrak{A}'$, der Halbebene $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$ die Halbebene $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\}$ entspricht, entsprechen nach 160 wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ auch der Geraden $\mathfrak{B}$ die Gerade $\mathfrak{B}'$, der Geraden $\mathfrak{C}$ die Gerade $\mathfrak{C}'$. Ist nun erstens $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, also $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so folgt

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'.$$

Ist zweitens $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, also $D = (\mathfrak{B}[I_0 J])$ eigentlich, und sind I_0', J', D' die den Punkten I_0, J, D entsprechenden Punkte, so ist auch $D' = (\mathfrak{B}'[I_0' J'])$ eigentlich, d. h. $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}' < \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$.

Ist noch $\mathfrak{G}''\mathfrak{H}'' = \mathfrak{A}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$, und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C} < \mathfrak{A}\mathfrak{D}$,

so soll $\mathfrak{AB} < \mathfrak{AD}$ folgen. Sei K der Grenzpunkt von $\mathfrak{D}$,

$$E = (\mathfrak{B}[I_0K]),\quad F = (\mathfrak{C}[JK]),$$

$\mathfrak{U}$ die Grenzgerade von I_0, $U = (\mathfrak{UB})$, $V = (\mathfrak{UC})$. Da D auf $\mathfrak{B}$ liegt, so findet die Reihenfolge $UIDO$, also $\mathfrak{U}$, $[I_0I]$, $[I_0D] = [I_0J]$, $[I_0O]$, und ebenso $\mathfrak{U}$, $[I_0J]$, $[I_0E] = [I_0K]$, $[I_0O]$, also (nach III 14 S. 147) die Reihenfolge $\mathfrak{U}$, $[I_0I]$, $[I_0K]$, $[I_0O]$, also $UIEO$ statt; also liegt E zwischen O, I, d. h. auf der Halbgeraden $\mathfrak{B}$, also ist $\mathfrak{AB} < \mathfrak{AD}$, was zu beweisen war.

170. Definitionen: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ zwei Halbgerade eines Punktes O in verschiedenen Halbebenen einer Ebene der Halbgeraden $\mathfrak{B}$ von O, so heißt der Winkel $\mathfrak{AC}$ die Summe der beiden Winkel $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{BC}$; und ist $\mathfrak{GH} = \mathfrak{AB}$, $\mathfrak{G}'\mathfrak{H}' = \mathfrak{BC}$, $\mathfrak{G}''\mathfrak{H}'' = \mathfrak{AC}$, so heißt auch $\mathfrak{G}''\mathfrak{H}''$ die Summe der beiden Winkel $\mathfrak{GH}$ und $\mathfrak{G}'\mathfrak{H}'$. Diese Definition ist zulässig, denn es gilt der Satz:

171. Satz: Summen resp. gleicher Winkel sind gleiche Winkel.

Beweis: Sei $\mathfrak{AB} = \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{BC} = \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Halbgerade eines Punktes und in einer Ebene, ebenso $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$; $\mathfrak{BA}\} \neq \mathfrak{BC}\}$ und $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\} \neq \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\}$. In einer Affinität, in welcher der Halbgeraden $\mathfrak{B}$ die Halbgerade $\mathfrak{B}'$, der Halbebene $\mathfrak{BA}\}$ die Halbebene $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\}$, also auch der Halbebene $\mathfrak{BC}\}$ die Halbebene $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\}$ entspricht, muß wegen $\mathfrak{BA} = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$ nach 162 auch der Halbgeraden $\mathfrak{A}$ die Halbgerade $\mathfrak{A}'$, und wegen $\mathfrak{BC} = \mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ der Halbgeraden $\mathfrak{C}$ die Halbgerade $\mathfrak{C}'$ entsprechen, also muß $\mathfrak{AC} = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ sein, was zu beweisen war.

172. Satz: Die Winkel bilden eine linear geordnete Gruppe mit assoziativer und kommutativer Multiplikation. Die Winkel $\mathfrak{AA}$ mit koinzidierenden Schenkeln und keine anderen sind als Null anzusehen.

Beweis: Zunächst folgt das assoziative Gesetz aus

$$(\mathfrak{AB}+\mathfrak{BC})+\mathfrak{CD}=\mathfrak{AC}+\mathfrak{CD}=\mathfrak{AD}=\mathfrak{AB}+\mathfrak{BD}=\mathfrak{AB}+(\mathfrak{BC}+\mathfrak{CD}),$$

und das kommutative, mit Rücksicht auf 165 aus:

$$\mathfrak{AB}+\mathfrak{BC}=\mathfrak{AC}=\mathfrak{CA}=\mathfrak{CB}+\mathfrak{BA}=\mathfrak{BC}+\mathfrak{AC}.$$

Aus

$$\mathfrak{AB}+\mathfrak{BC}=\mathfrak{AB}$$

folgt

$$\mathfrak{AC}=\mathfrak{AB}$$

also

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{B},$$

d. h. nur die Winkel $\mathfrak{BB}$ lassen als Summanden eine Summe ungeändert. Es ist $\mathfrak{AA} = \mathfrak{BB}$ nach Definition 167.

Aus $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\mathfrak{X} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$$
folgt $$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$
also eindeutig $$\mathfrak{X} = \mathfrak{C}.$$

Die Anordnung ist offenbar linear, denn man kann diejenigen Halbgeraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... eines Punktes O, welche in einer bestimmten Halbebene von $\mathfrak{A}$ liegen, also auch die Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$, ..., eindeutig den Punkten einer sie schneidenden Geraden zuordnen. Demnach ist die Anordnung der Winkel dieselbe, wie die der Punkte einer Geraden, und sie bleibt bei Addition eines Winkels, d. h. bei einer Affinität ungeändert.

173. Über imaginäre Grenzelemente sei nur kurz Folgendes bemerkt. Drei beliebige Punkte A, B, C des Grenzovals definieren einen imaginären Punkt desselben. Sind die Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ die in der Ebene $\{ABC\}$ liegenden Grenzgeraden der Punkte A, B, C, und ist $P = ([BC][B_1 C_1])$, $Q = ([CA][C_1 A_1])$, $R = ([AB][A_1 B_1])$, so definieren die drei in einer Geraden liegenden Punkte PQR den imaginären Punkt ABC in der früher (s. III 57 S. 165) für imaginäre Punkte gegebenen Darstellung. Ebenso definieren drei beliebige Grenzebenen eine imaginäre Grenzebene, drei beliebige Grenzgerade einer Ebene eine imaginäre Grenzgerade derselben Ebene, drei beliebige Grenzgerade eines Punktes eine imaginäre Grenzgerade desselben Punktes, drei beliebige Grenzgerade, die sich paarweis nicht schneiden, eine „hochimaginäre“ (s. S. 165) Grenzgerade. Auf Grund dieser Definitionen beweist man leicht die Sätze: Auf jeder Nicht-Grenzgeraden liegen zwei reelle oder imaginäre Grenzpunkte; durch jede Nicht-Grenzgerade gehen zwei reelle oder imaginäre Grenzebenen; in jedem Büschel gibt es zwei reelle oder imaginäre Grenzgerade; durch jeden Grenzpunkt gehen zwei imaginäre Grenzgerade, die ganz auf dem Grenzoval liegen.

174. Im vorstehenden ist die Nicht-Euklidische Geometrie auf Grund der Verknüpfungs- und Anordnungssätze, der Stetigkeit und der Existenz der Affinitäten, aber ohne Voraussetzung der Meßbarkeit begründet worden. Trotzdem war es schon hier im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie möglich, die metrischen Begriffe Strecke (151) und Winkel (161) einzuführen, und ihre Haupteigenschaften 153, 159, 162, 164, 171 ohne Einführung weiterer Grundsätze abzuleiten. In der Euklidischen Geometrie war dies unmöglich, da dort z. B. jedes Paar verschiedener Punkte jedem andern in einer geeigneten Affinität entspricht, also gleich wäre.

Andererseits sind aber die Begriffe der Strecke und des Winkels von der Annahme der uneigentlichen Elemente völlig unabhängig, wie z. B. die Geometrie des Bündels erkennen läßt, in welchem ja uneigentliche Elemente nicht vorhanden sind. Demnach muß es möglich sein, die Theorie dieser Begriffe zu entwickeln, ohne über die Existenz oder Nichtexistenz uneigentlicher Elemente eine Voraussetzung zu machen. Diese Entwicklung, zu der wir nunmehr übergehen, nennen wir die metrische Geometrie. Hier werden die Sätze 153, 159, 162, 164 als Grundsätze anzunehmen sein. Nimmt man dann an, daß keine uneigentlichen Elemente existieren, so erhält man die projektivisch-metrische Geometrie. Nimmt man den Euklidischen Grundsatz an, daß auf jeder Geraden genau ein uneigentlicher Punkt liegt, so erhält man die Euklidische metrische Geometrie. Nimmt man schließlich mehrere uneigentliche Punkte auf jeder Geraden an, so kommt man zur Nicht-Euklidischen metrischen Geometrie.*) Demnach ist die Euklidische metrische Geometrie von der Euklidischen affinen Geometrie wirklich verschieden. Dagegen stimmt die Nicht-Euklidische metrische Geometrie mit der Nicht-Euklidischen affinen zwar nicht in ihren Ausgangspunkten, aber sachlich überein. Die eine beruht auf dem Grundsatz von der Existenz der Affinitäten, die andere auf den metrischen Grundsätzen.

---

*) Poincarés „vierte Geometrie“ (s. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, Leipzig 1904, S. 47) bleibt außer Betracht, da in derselben der auf der Erfahrung beruhende Satz 33 (resp. 35) nicht stattfindet.



V.

Metrische Geometrie.



Die Kongruenzsätze.

1. Im folgenden werden die Verknüpfungssätze und die Sätze der reinen Anordnung vorausgesetzt. Die Existenz oder Nichtexistenz uneigentlicher Elemente bleibt dahingestellt. Existieren uneigentliche Elemente, so werden auch deren Verknüpfungs- und reine Anordnungssätze angenommen.

2. Definition: Durch zwei Punkte A, B einer Geraden werden alle Punkte derselben in zwei Klassen geteilt, so daß je zwei Punkte einer Klasse durch A, B nicht getrennt sind. Die Gesamtheit der Punkte einer der beiden Klassen wird daher durch Angabe eines ihrer Punkte eindeutig bezeichnet. Jede der beiden Klassen heißt Strecke $AB = BA$, wobei vorausgesetzt wird, daß dieser zweideutige Ausdruck in jedem einzelnen Falle durch Angabe eines Punktes der Klasse eindeutig fixiert wird. A und B heißen die Endpunkte der Strecke AB. Zwei Strecken AB, AC einer Geraden heißen inzident, wenn entweder B ein Punkt von AC oder C ein Punkt von AB ist. Im ersten Fall heißt jede der Strecke AB gleiche Strecke kleiner als jede der Strecke AC gleiche Strecke; im zweiten Fall heißt jede der Strecke AB gleiche Strecke größer als jede der Strecke AC gleiche Strecke. Die Strecken haben die folgenden Grundeigenschaften:

3. Grundsatz: Wenn A, B, C gegebene Punkte, CX eine gegebene Strecke ist, so existiert genau ein Punkt D so, daß die Strecke CD der Strecke AB gleich und der Strecke CX inzident ist.

Dieser Grundsatz ist von den vorhergehenden Grundsätzen unabhängig. Denn läßt man z. B. in der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie der Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten nur Punkte (x, y) mit rationalen x, y zu, so existiert auf der durch die Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$ gehenden Geraden von $(0, 0)$ an keine Strecke, die der Strecke der beiden Punkte $(0, 0)$, $(1, 1)$ gleich ist.

4. Definition: Sind A, B, C Punkte einer Geraden und sind die Strecken BA, BC nicht inzident, so heißt diejenige Strecke AC, von welcher B ein Punkt ist, die Summe der Strecken AB und BC.

Die Beziehung zwischen den Strecken AB, AC, BC wird durch

$$AB + BC = AC$$

dargestellt, wobei die Auffassung als Addition willkürlich ist. Die Strecken-Addition hat aber die folgende Grundeigenschaft:

5. Grundsatz: Summen gleicher Strecken sind gleiche Strecken, d. h. aus $AB + BC = AC$ und $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, soll $A'C' = AC$ folgen, falls $A'C'$ diejenige Strecke ist, welcher B' angehört.

6. Satz: Die Streckenaddition ist assoziativ und kommutativ; die Strecken AA sind als einander gleich und gleich Null anzusehen. Durch die Summe zweier Strecken und den einen Summanden ist der andere eindeutig bestimmt.

Beweis: Es ist

$$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD = AB + BD = AB + (BC + CD).$$

Mit Rücksicht auf 2 ist $AC = CA$, also

$$AB + BC = AC = CA = CB + BA = BC + AB.$$

Aus $AB + BX = AB$ folgt $AX = AB$ also (3) eindeutig $X = B$, d. h. $BB = 0$. Aus $AB + BX = AC$ folgt $AX = AC$ also eindeutig $X = C$. Aus $AA + AB = AB = AB + BB = BB + AB$ folgt also $AA = BB$.

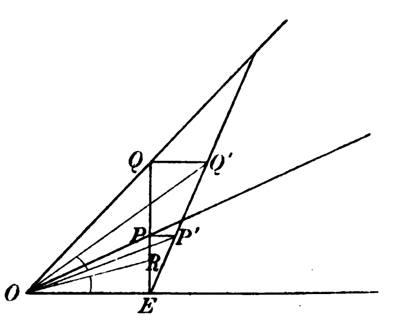
7. Definition: Das System aller mit der Strecke AB inzidenten Strecken des Punktes A soll Halbgerade $AB]$ heißen. In bezug auf zwei Halbgerade $AB]$, $AC]$ eines Punktes A zerfallen alle übrigen Halbgeraden desselben Punktes A und derselben Ebene $\{ABC\}$ in zwei Klassen. Jede der beiden Klassen definiert einen „Winkel" $\angle BAC = CAB$, so daß dieser zweideutige Ausdruck in jedem einzelnen Falle durch Angabe einer der Halbgeraden der betreffenden Klasse eindeutig fixiert wird. Die Halbgeraden $AB]$, $AC]$ heißen die Schenkel des Winkels, A seine Scheitel, $\{ABC\}$ seine Ebene. Zwei Winkel CAB und $C'AB$ heißen inzident, wenn Schenkel $AC]$ zur Halbgeraden-Klasse von $C'AB$ oder $AC']$ zur Halbgeraden-Klasse von CAB gehört. Im ersten Falle heißt jeder dem Winkel CAB gleiche Winkel kleiner, im zweiten Falle größer als jeder dem Winkel $C'AB$ gleiche Winkel. Sind $AB]$, $AB']$ zwei Halbgeraden einer Geraden, ebenso $AC]$, $AC']$ zwei Halbgeraden einer Geraden, so heißen die Winkel BAB', CAC' gestreckte, je zwei nicht inzidente Winkel BAC, BAC' Nebenwinkel und je zwei Winkel BAC, $B'AC'$ desselben Nebenwinkels heißen Scheitelwinkel. Ist ein Winkel einem seiner Nebenwinkel gleich, so heißt er ein Rechter. Geraden, die sich unter einem Rechten schneiden, heißen senkrecht ($\perp$) oder Lote zu-

einander. Ein Winkel heißt stumpf oder spitz, je nachdem er größer oder kleiner als ein Rechter ist.

Die Winkel haben die folgende Grundeigenschaft.

8. Grundsatz: Wenn BAC und $B'A'X$ gegebene Winkel sind, so existiert genau ein Winkel $B'A'C'$, welcher dem Winkel BAC gleich und dem Winkel $B'A'X$ inzident ist.

Dieser Grundsatz ist unabhängig von allen vorhergehenden einschließlich den über Strecken aufgestellten. Um dies einzusehen, trage man in der Euklidischen Ebene Strecken in der gewöhnlichen Weise ab, Winkel aber durch Parallelverschieben und Drehen; und zwar ersteres, wie gewöhnlich, letzteres wie folgt (s. Fig.). Um den Winkel QOP so zu drehen, daß ein Schenkel auf OE fällt, trage man auf $[OE]$ die Strecke $OE = 1$ auf, ziehe $[PQE]$ senkrecht zu $[OE]$, P und Q auf den Schenkeln des gegebenen Winkels, mache den Winkel PEP' in gewöhnlichem Sinne des Wortes einem fest gegebenen Winkel ε gleich, ziehe $[QQ']$ und $[PP']$ senkrecht $[PQ]$, P', Q' auf dem Schenkel $EP']$ von ε, mache ROE im gewöhnlichen Sinne des Wortes dem Winkel $Q'OP'$ gleich, R auf $[PQ]$; dann soll Winkel ROE dem Winkel QOP gleich heißen. Der Punkt R hängt von P und Q und von $\operatorname{tg}\varepsilon$ durch bloße Quadratwurzeln ab; läßt man also



nur Punkte zu, deren Koordinaten rational sind oder aus rationalen Zahlen durch bloße Quadratwurzelausziehungen hervorgehen, wählt aber für $\operatorname{tg}\varepsilon$ eine nicht in diesem System enthaltene Irrationalität, so gehört der Punkt R oder der gesuchte Schenkel $OR]$ nicht dieser Geometrie an.

9. Satz: Nach Annahme dieser Grundsätze bleiben der Pascalsche Satz und der ebene Desarguessche Satz noch unbeweisbar.

Beweis: Man messe in der Nicht-Desarguesschen Geometrie (II 58 S. 67) Strecken wie gewöhnlich, Winkel, deren Scheitel nicht auf dem Kreise $x^2 + y^2 = 1$ liegen, wie gewöhnlich, Winkel, deren Scheitel auf dem Kreise $x^2 + y^2 = 1$ liegen, wie folgt. Winkel, deren beide Schenkel Kreisbogen sind, setze man ihren Scheitelwinkeln gleich, Winkel, von denen ein Schenkel ein Kreisbogen ist, der andere nicht, setze man dem Supplement ihres Nebenwinkels gleich. Dann gelten offenbar die Grundsätze 3, 5, 8, aber weder der Desarguessche noch der Pascalsche Satz, da überhaupt kein Schließungssatz gilt.

10. Definition: Es gibt im allgemeinen, nämlich wenn uneigentliche Punkte nicht vorhanden sind, acht Dreiecke ABC, da jede der drei Seiten AB, AC, BC zweideutig bestimmt sind. Nachdem die Seiten (nach 2) eindeutig fixiert sind, sind auch die Halbgeraden $AB]$, $BA]$ usw. bestimmt; aber die Winkel BCA usw. sind als Winkel zweier bestimmter Halbgeraden $CA]$, $CB]$ immer noch zweideutig. Dieselben sollen nun (nach 7) eindeutig fixiert werden, und zwar nach Fixierung der Seiten derart, daß wenn z. B. für die Seite AB die kleinere der beiden Strecken AB gewählt wurde, daß dann für den Winkel ACB der kleinere der beiden Winkel ACB gewählt werden soll. Sind uneigentliche Punkte vorhanden, also die Strecken AB, AC, BC eindeutig bestimmt, so sollen als Winkel ACB, usw. die kleineren gewählt werden, die also kleiner als gestreckte sind.

11. Grundsatz: Ist $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = B'A'C'$, so ist auch $\angle ABC = A'B'C'$, also auch $\angle ACB = A'C'B'$.

Dieser Grundsatz ist unabhängig von allen vorhergehenden. Um dies nachzuweisen, betrachte man eine Euklidische Ebene E und projiziere ihre Punkte und Geraden senkrecht auf eine dazu geneigte Ebene E'. Man betrachte zwei Strecken der Ebene E als gleich, wenn sie es im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, aber zwei Winkel als gleich, wenn ihre Projektionen in E' im gewöhnlichen Sinne des Wortes gleich sind. Dann gelten offenbar alle aufgestellten Grundsätze, aber nicht 11.

Dieselbe Überlegung läßt sich in analytischer Form machen und dann auf den Raum ausdehnen: Man lege für die Vergleichung der Strecken ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, für die Vergleichung der Winkel ein schiefwinkliges, in dem man aber die Formeln für rechtwinklige Koordinaten anwendet.

(Vgl. auch die in 61 betrachteten Geometrien.)

12. Definition: Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen kongruent ($\cong$), wenn $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle ABC = A'B'C'$, $\angle BCA = B'C'A'$, $\angle CAB = C'A'B'$ ist.*)

13. Satz: Ist $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = B'A'C'$, so ist $BAC \cong B'A'C'$.

Beweis: Nach 11 ist nur noch $BC = B'C'$ nachzuweisen. Sei $B'D' = BC$, und inzident $B'C'$. Dann ist (11) $\angle B'A'C' = BAC = B'A'D'$, also (8) $[A'C'] = [A'D']$, $C' = D'$.

14. Satz: Ist $AB = A'B'$, $\angle CAB = C'A'B'$, $\angle CBA = C'B'A'$, so ist $ABC \cong A'B'C'$.

*) Man kann auch die Theorie der Kongruenz ohne Benutzung der Winkelgleichheit begründen; vgl. Mollerup, Math. Ann. 58 (1904) S. 479.

Beweis: Es sei $A'D' = AC$ und inzident $A'C'$; dann ist (11) $\angle D'B'A' = CBA = C'B'A'$, also (8) $[D'B'] = [C'B']$, $D' = C'$.

15. **Satz:** Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel.

Beweis: Sei $DA = D'A'$, $DB = D'B'$, $DC = D'C'$, $\angle ADC = A'D'C'$, so folgt (11): $\angle CAD = C'A'D'$ und (13) $CA = C'A'$ und (5) $AB = A'B'$, also (11) $CAD \cong C'A'D'$, also $\angle CBD = C'B'D'$, $CB = C'B'$, also (11) $CBD \cong C'B'D'$, also $\angle CDB = C'D'B'$.

16. **Definition:** Sind $OA]$, $OB]$, $OC]$ drei Halbgerade eines Punktes und in einer Ebene, und sind die Winkel AOB und BOC nicht inzident, so heißt derjenige Winkel AOC, von welchem $OB]$ eine Halbgerade ist, die Summe der Winkel AOB und BOC. Die Beziehung zwischen diesen Winkeln wird durch

$$AOB + BOC = AOC$$

dargestellt, wobei die Auffassung als Addition willkürlich ist. Die Winkel-Addition hat die folgende Eigenschaft:

17. **Satz:** Summen gleicher Winkel sind gleiche Winkel, d. h. aus $AOB + BOC = AOC$ und $\angle AOB = A'O'B'$, $\angle BOC = B'O'C'$ soll $\angle A'O'C' = AOC$ folgen, falls auch $A'O'C'$ derjenige Winkel ist, dem die Halbgerade $O'B']$ angehört.

Beweis: Es sei $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, also (13) $AB = A'B'$ und (11) $\angle OBA = O'B'A'$; es sei ferner C auf $[AB]$, C' auf $[A'B']$, also (15) $\angle OBC = O'B'C'$, also (14) $OC = O'C'$, $BC = B'C'$ und $\angle OCB = O'C'B'$; so folgt (5) $CA = C'A'$, also (11) $\angle COA = C'O'A'$.

Existieren uneigentliche Punkte, so folgt nach Annahme der eigentlichen Punkte A und C, daß B (nach IV 25) eigentlich ist, dann daß auch A', B', C' (nach 3) eigentlich sind.

18. **Satz:** Die Winkeladdition ist assoziativ und kommutativ; alle Winkel AOB mit $OA] = OB]$ sind als einander gleich und gleich Null anzusehen. Durch die Summe zweier Winkel und den einen Summanden ist der andere eindeutig bestimmt.

Beweis: Es ist:

$$(AOB + BOC) + COD = AOC + COD = AOD$$
$$= AOB + BOD = AOB + (BOC + COD).$$

Mit Rücksicht auf 7 ist:

$$AOB + BOC = AOC = COA = COB + BOA = BOC + AOB.$$

Aus $AOB + BOX = AOB$ folgt $\angle AOX = AOB$, also (8) eindeutig $OX] = OB]$, d. h. $BOB = 0$. Aus $AOB + BOX = AOC$ folgt $\angle AOX = AOC$, also eindeutig $OX] = OC]$. Aus $AOA + AOB = AOB = AOB + BOB = BOB + AOB$ folgt also $\angle AOA = BOB$.

19. Satz: Scheitelwinkel sind gleich.

Beweis folgt aus 15 und dem letzten Satz aus 18.

20. Satz: Alle rechten Winkel sind gleich.

Beweis: Sei $DAB \simeq DAB'$, BAB' in gerader Linie; ferner $\angle C_1A_1B_1 = C_1A_1B_1'$ und man mache $\angle CAB = C_1A_1B_1$, C auf $[BD]$, also auch (15) $\angle CAB' = C_1A_1B_1'$; dann ist $\angle CB'A = CBA = DBA = DB'A$, also (8)

$$[B'C] = [B'D], \quad C = D, \quad [AC] = [AD], \quad \angle BAC = BAD,$$
$$\angle B_1A_1C_1 = BAC = BAD.$$

(C ist eigentlich, weil (s. IV 29 S. 180) zwischen D und B resp. D und B' gelegen.)

21. Dieser Satz ist von Euklid*) als Grundsatz aufgestellt, von Legendre**) und Hilbert***) bewiesen worden. Legendre schließt im wesentlichen:

$$CAB < DAB = DAB' < CAB',$$

also kann nicht $CAB = CAB'$ sein. Aber die Einführung des „größer" und „kleiner" ist hier nicht erforderlich. Crelles†) Bemerkung, der Satz sei hier im Gegensatz zu Euklid beweisbar infolge des Grundsatzes: Durch zwei Punkte ist genau eine Gerade bestimmt, ist offenbar unrichtig. Vielmehr ist das Entscheidende am Legendreschen, wie am Hilbertschen, wie am obigen Beweise, die Voraussetzung des Satzes 8 von der Eindeutigkeit des Winkelabtragens. Diesen Satz nimmt Euklid nicht als Grundsatz an, konnte daher auch nicht den Satz von der Gleichheit der rechten Winkel beweisen. Hilbert hat also Unrecht, Euklid hieraus einen Vorwurf zu machen. Es entspricht sogar mehr unserer Forderung, daß jeder Grundsatz einen möglichst geringen Inhalt haben soll, wenn man mit Euklid den Satz von der Gleichheit der rechten Winkel zum Grundsatz wählt. Dieser Satz kann nämlich als die Eindeutigkeit des Winkelabtragens für rechte Winkel aufgefaßt werden, und man kann aus ihm den Satz von der Eindeutigkeit des Abtragens beliebiger Winkel folgern. Denn es sei $\angle CAM = C'AM$ und man mache $MB = AM$, $\angle CMA = CMB =$ einem Rechten, $AC' = AC$, so folgt $CMA \simeq CMB$, also $\angle CAM = CBM$, ferner $CA = C'A$, $\angle CAB = C'AB$, $AB = AB$, also $CAB \simeq C'AB$, also $CB = C'B$, $\angle CBA = C'BA$, also $CBM \simeq C'BM$, also $\angle C'MB = CMB =$ einem Rechten und $CM = C'M$, also $[CM] = [C'M]$, also

*) Euklidis Elementa ed. Heiberg (Leipzig 1883) I p. 8.

**) Legendre, Géométrie. Livre I. Théorème 1.

***) Hilbert, Grundlagen der Geometrie § 6, Satz 15.

†) Legendre, Geometrie, deutsch von Crelle. 4. Aufl. (Berlin 1844) p. 5.

$C = C'$, was zu beweisen war. Übrigens wird die Annahme eines dieser Sätze zum Grundsatz entbehrlich, wenn man statt 11 den Satz 13 zum Grundsatz wählt.

22. Satz: Aus $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ folgt $ABC \cong A'B'C'$.

Beweis: Es sei $\angle C''A'B' = CAB$ und nicht inzident $\angle C'A'B'$; ferner sei $C''A' = CA$, also (13) $C''A'B' \cong CAB$. Ferner $A'C'C'' \cong A'C''C'$, also $\angle A'C'C'' = A'C''C'$, ebenso folgt $C'B'C'' \cong C''B'C'$, also $\angle B'C'C'' = B'C''C'$, also (17) $\angle A'C'B' = A'C''B' = ACB$, also (13) $A'C'B' \cong ACB$.

23. Definition: Sind $MA = MB$ zwei gleiche nicht inzidente Strecken einer Geraden, so heißt M ein Mittelpunkt derjenigen Strecke AB, welche den Punkt M enthält.

24. Satz: Jede Strecke hat genau einen Mittelpunkt.

Beweis: Man wähle C außerhalb $[AB]$, mache $\angle C'AB = CBA$, $C'A = CB$, also $C'AB \cong CBA$. Von den beiden Punkten $([AC][BC'])$, $([AC'][BC])$ ist jedenfalls einer stets eigentlich, da er zwischen C, A resp. C, B liegt. Ist $D = ([AC][BC'])$ eigentlich, also (14) $DAB \cong DBA$, $DA = DB$, so mache man $\angle DAB = D'AB$ und nicht inzident, dann $DA = D'A$, also $DAB \cong D'AB$; dann ist $M = ([DD'][AB])$ eigentlich, weil zwischen A und B gelegen, und es ist $DAB \cong D'AB$ (13), $DB = D'B$, also (22) $DAD' \cong DBD'$, also $\angle ADM = BDM$, also (13) $DAM \cong DBM$, also $AM = MB$. Gäbe es noch einen zweiten Punkt M', so wäre (z. B.) $MB = AM = AM' + M'M = M'B + M'M = M'M + MB + M'M$, also (6) $M'M + M'M = 0$, woraus $M'M = 0$, $M' = M$ folgt.

25. Satz: Durch den Punkt M auf $[AB]$ geht genau eine, durch jeden andern mindestens (vgl. 38) eine Senkrechte zu $[AB]$.

Beweis: Liegt M auf $[AB]$, so mache man $MA = MB$ nicht inzident und verfahre wie in 24. Liegt M nicht auf $[AB]$ und ist MAB kein Rechter, so mache man $\angle MAB = M'AB$ nicht inzident und $MA = M'A$, $N = ([AB][MM'])$; dann ist N zwischen M und M' gelegen, also eigentlich, und $ANM \cong ANM'$, also $\angle ANM = ANM'$ gleich einem Rechten.

26. Satz: Ist M der Mittelpunkt von AB, und sind MA', MB' nicht inzidente Strecken einer Geraden, und $\angle A'AM = B'BM$, so existiert zu $[AA']$, $[BB']$ eine gemeinsame Senkrechte.

Beweis: Sei $[MP]$ senkrecht $[AA']$, P auf $[AA']$, $BQ = AP$, so daß $\angle QMB$ dem Scheitelwinkel von PMA inzident, so ist $AMP \cong BMQ$, also $\angle AMP = BMQ$, d. h. PMQ ist eine Gerade, und $\angle MQB = MPA$, also $[PQ]$ auf beiden Geraden senkrecht.

27. Satz: Jeder Winkel AOB hat genau eine Mittelgerade (Halbgerade) $OM]$, so daß $AOM = MOB$ ist.

Beweis: Sind $OA = OB$ gleiche Strecken auf den Schenkeln des Winkels, M der Mittelpunkt von AB, so ist $\angle OAB = OBA$, also $OAM \sim OBM$, also $\angle AOM = BOM$, und $OM]$ eindeutig bestimmt; denn wäre auch $\angle AOM' = BOM'$, M' auf $[AB]$, dann wäre $AOM' \sim BOM'$, also $AM' = BM'$, also (24) $M' = M$.

28. Satz: Ist $[OB] \perp [OP] \perp [OA]$ und liegen $OABC$ in einer Ebene, dann ist auch $[OP] \perp [OC]$; und umgekehrt: ist auch $[OP] \perp [OC]$, dann sind $OABC$ in einer Ebene.

Beweis: Man kann A, B, C in einer Geraden annehmen. Macht man $PO = OP'$, nicht inzident, auf einer Geraden, so ist $OPA \cong OP'A$, also $PA = P'A$, ebenso $PB = P'B$, also (22) $PAB \cong P'AB$, $\angle PAB = P'AB$, also (18) $PAC \sim P'AC$, also $PC = P'C$, also (22) $POC \cong P'OC$, also $\angle POC = P'OC =$ einem Rechten. — Umgekehrt, ist $\mathsf{E} = \{OAB\}$, $\mathfrak{G} = [\{OAB\}\{OPC\}]$, so ist nach obigem $\mathfrak{G} \perp [OP]$ und nach Voraussetzung $[OC] \perp [OP]$, also (20) $\mathfrak{G} = [OC]$, d. h. $[OC]$ in $\{OAB\}$.

29. Definition: Eine Gerade $[OP]$ heißt senkrecht auf einer Ebene $\mathsf{E} = \{OAB\}$, wenn $[OA] \perp [OP] \perp [OB]$ ist.

30. Satz: Durch jeden Punkt auf einer gegebenen Geraden resp. Ebene geht genau eine, durch jeden anderen Punkt mindestens eine zu der gegebenen Geraden oder Ebene senkrechte Ebene resp. Gerade.

Beweis: Durch O auf $\mathfrak{G}$ sei $[OP] \perp \mathfrak{G}$ und in einer anderen Ebene $[OQ] \perp \mathfrak{G}$; dann ist $\{OPQ\} \perp \mathfrak{G}$. Gibt es durch O eine zweite Ebene $\mathsf{E} \perp \mathfrak{G}$, und schneidet irgend eine Ebene Δ von $\mathfrak{G}$ die Ebenen $\{OPQ\}$ und E in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, so ist $\mathfrak{H} \perp \mathfrak{G} \perp \mathfrak{H}'$, also (20) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$, also $\mathsf{E} = \{OPQ\}$. — Auf $[OA]$ errichte man in O senkrecht die Ebene A, auf $[OB]$ in O senkrecht die Ebene B, dann ist $\mathfrak{G} = [\mathsf{AB}] \perp \{OAB\}$ in O. Wäre es in O auf $\{OAB\}$ eine zweite senkrechte $\mathfrak{H}$, dann wäre in $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$ sowohl $\mathfrak{G}$ als $\mathfrak{H}$ senkrecht auf $[\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}\{OAB\}]$, also (20) $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$. — Von P, nicht auf $\mathfrak{G}$, ziehe man $[PO] \perp \mathfrak{G}$, durch O auf $\mathfrak{G}$ lege man $\mathsf{E} \perp \mathfrak{G}$; E geht durch P, wegen 28. — Durch P nicht in $\{AB\}$ [illegible] lege man [illegible] $[AB]$, durch Q auf $[AB]$ ziehe man in $\{AB\}$ [illegible] das Lot $[OQ]$ [illegible] $[AB]$, von P fälle man das Lot $[PO]$ auf [illegible], dann ist [illegible] $[AB]$; denn sei O Mittelpunkt von PP', also [illegible], also $PQ = P'Q$, $\angle AQP = AQP' = AQO = 1$ Rechter, also [illegible], $BQP \sim BQP'$, also $AP = AP'$, $BP = BP'$, also [illegible], also AOP und BOP Rechte.

31. Satz: Sind A, B zwei Elemente einer Geraden $[AB]$ und [illegible], so sind die Winkel der Geraden $[EA]$, $[EB]$ und der Geraden [illegible] einander gleich.

Beweis: Es sei

$$([\mathsf{AB}]\mathsf{E}) = O, \quad ([\mathsf{AB}]\mathsf{E}') = O', \quad [\mathsf{EA}] = [OA], \quad [\mathsf{EB}] = [OB],$$

M der Mittelpunkt von OO', von AA', von BB'; so folgt $MAB \cong MA'B'$, $MOA \cong MO'A'$, $MOB \cong MO'B'$, also $AB = A'B'$, $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, also $OAB \cong O'A'B'$, also $\angle AOB = A'O'B'$.

32. Definition: Zwei gerade, ebene oder räumliche Figuren $ABC \ldots P$, $A'B'C' \ldots P'$ heißen kongruent, wenn alle „homologen" Seiten AB, $A'B'$ usw. (also auch Winkel) gleich sind. Entsprechend für Figuren im Büschel oder Bündel.

33. Satz: Ist A' auf $\mathfrak{G}'$ gegeben, so gibt es zu jeder geraden Figur $ABC \ldots P$, genau zwei kongruente Figuren $A'B'C' \ldots P'$ auf der Geraden $\mathfrak{G}'$.

Beweis: Sei $A'B' = AB$, B' auf $\mathfrak{G}'$. Sei dann $A'C' = AC$ und $A'C'$, $A'B'$ inzident oder nicht, je nachdem AC, AB inzident sind oder nicht. Dann ist auch $B'C' = BC$. Werde ebenso D' usw. bestimmt, dann ist auch z. B.

$$C'D' = \pm (A'C' \pm A'D') = \pm (AC \pm AD) = CD,$$

usw. also $A'B'C' \ldots P' \cong ABC \ldots P$. Nur der Punkt B' ergibt sich zweideutig; dann alle übrigen eindeutig.

34. Satz: Ist $A'B' = AB$ gegeben, so gibt es zu jeder ebenen Figur $ABC \ldots P$ genau zwei kongruente Figuren $A'B'C' \ldots P'$ in jeder Ebene E' von $[A'B']$.

Beweis: Seien $[CC_1]$, $[DD_1]$, $\ldots$, $[PP_1] \perp [AB]$, und C_1, D_1, $\ldots$, P_1 auf $[AB]$ (es kann z. B. auch $C_1 = C$ sein), und sei

$$A'B'C_1'D_1' \ldots P_1' \cong ABC_1D_1 \ldots P_1;$$

ferner sei in E': $[C'C_1']$, $[D'D_1']$, $\ldots [P'P_1'] \perp [A'B']$ und $C'C_1' = CC_1$, $D'D_1' = DD_1$, $\ldots$, $P'P_1' = PP_1$, und zwar, nachdem von den beiden für C' möglichen Punkten der eine gewählt ist, werde z. B. D' so gewählt, daß $A'B'$ $([C'D'][A'B']) \cong AB$ $([CD][AB])$ ist, was wegen 33 nur auf eine Weise möglich ist. Dann ist auch $\angle BAC = B'A'C'$, $\angle BAD = B'A'D'$, also $\angle CAD = C'A'D'$, also $CAD \cong C'A'D'$, also $CD = C'D'$, usw. also $A'B'C' \ldots P' \cong ABC \ldots P$.

35. Satz: Ist $A'B'C' \cong ABC$ gegeben, so gibt es zu jeder räumlichen Figur $ABC \ldots P$ genau zwei kongruente Figuren $A'B'C' \ldots P'$.

Beweis: Seien $[DD_1]$, $[EE_1]$, $\ldots$, $[PP_1] \perp \{ABC\}$, und D_1, E_1, $\ldots$, P_1 in $\{ABC\}$, (es kann z. B. auch $D_1 = D$ sein), und sei

$$A'B'C'D_1'E_1' \ldots P_1' \cong ABCD_1E_1 \ldots P_1;$$

ferner sei $[D'D_1']$, $[E'E_1']$, $\ldots [P'P_1'] \perp \{A'B'C'\}$ und $D'D_1' = DD_1$,

$E'E_1' = EE_1, \ldots P'P_1' = PP_1$, und zwar, nachdem von den beiden für D' möglichen Punkten der eine gewählt ist, werde z. B. E' so gewählt, daß $ABC(\{ABC\}[DE]) \cong A'B'C'(\{A'B'C'\}[D'E'])$ ist, was wegen 34 nur auf eine Weise möglich ist. Dann ist z. B. $\angle A'D_1'D' = AD_1D =$ einem Rechten, also $A'D_1'D' \cong AD_1D$, also $A'D' = AD$; ebenso $A'E' = AE$ usw.; ferner $D_1'E_1' = D_1E_1$, $\angle D'D_1'E_1' = DD_1E_1 =$ einem Rechten, $\angle E'E_1'D_1' = EE_1D_1 =$ einem Rechten, also $D'D_1'E_1'E' \cong DD_1E_1E$, also $D'E' = DE$ usw., also

$$A'B'C'D' \ldots P' \cong ABCD \ldots P.$$

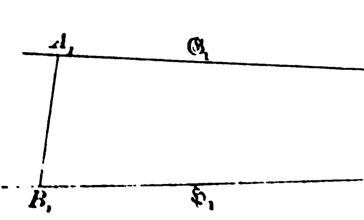
Uneigentliche Elemente.

36. Grundsatz: Ist $AB = CD$, und sind A, B, C eigentliche Punkte, so ist auch D eigentlich.

Dieser „metrische Grundsatz der uneigentlichen Elemente" wird wie die früher aufgestellten Verknüpfungs- und Anordnungsgrundsätze der uneigentlichen Elemente unmittelbar der Erfahrung entnommen. Auf Grund dieser Sätze können wir nunmehr den Satz beweisen:

37. Satz: Je nachdem ob auf einer (eigentlichen) Geraden kein, oder ein, oder mehr uneigentliche Punkte liegen, ist dasselbe bei jeder Geraden der Fall.

Beweis: Man kann jedem uneigentlichen Punkt einer Geraden $\mathfrak{G}$, definiert durch die Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, einen uneigentlichen Punkt einer andern Geraden $\mathfrak{G}_1$, definiert durch die Geraden $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, eindeutig zuordnen (s. Fig.).

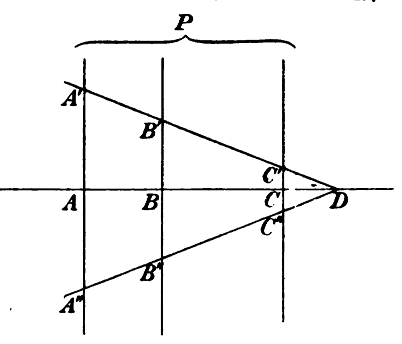


Zu dem Zwecke verbinde man A (auf $\mathfrak{G}$) mit B (auf $\mathfrak{H}$), trage den Winkel der Geraden $\mathfrak{G}, [AB]$ an $\mathfrak{G}_1$ in A_1 an, mache den andern Schenkel $A_1B_1 = AB$, und trage den Winkel der Geraden $[BA]$, $\mathfrak{H}$ an $[B_1A_1]$ entsprechend in B_1 an. Ist der andere Schenkel $\mathfrak{H}_1$, so wird durch $\mathfrak{H}_1$ ein uneigentlicher Punkt $C_1 = (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1)$ auf $\mathfrak{G}_1$ definiert. Denn wäre er eigentlich und $AC = A_1C_1$, C auf $\mathfrak{G}$, eigentlich, so wäre $ABC \sim A_1B_1C_1$, also $\angle CBA = \angle C_1B_1A_1 = \angle(\mathfrak{H}_1, [B_1A_1]) = \angle(\mathfrak{H}, [BA])$, also $[BC] = \mathfrak{H}$, d. h. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ hätten den eigentlichen Schnittpunkt C. Einem andern uneigentlichen Punkt auf $\mathfrak{G}$, definiert durch $\mathfrak{H}'$, wird, von denselben Punkten A, A_1 ausgehend, ein anderer uneigent-

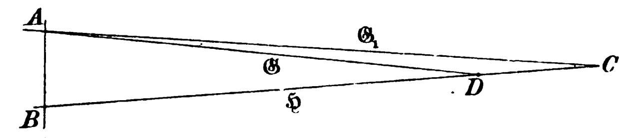
licher Punkt auf $\mathfrak{G}_1$ definiert durch $\mathfrak{H}_1'$ zugeordnet. Gehen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_1'$ durch denselben uneigentlichen Punkt, was mit Hilfe des Desarguesschen Satzes erkannt wird, so findet dasselbe für $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ statt, wie sich durch kongruente Übertragung der Desarguesschen Figur ergibt.

38. Satz: Treffen sich zwei Gerade $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, welche, wie in Satz 26, mit einer dritten gleiche Winkel bilden, oder also (wegen 26) zwei Gerade, welche auf einer dritten senkrecht stehen und in derselben Ebene liegen, in einem eigentlichen Punkte P, so gibt es überhaupt keinen uneigentlichen Punkt.

Beweis: Sind $[AP]$, $[BP]$, $[C'C]$ senkrecht zu $[AB]$ (s. Fig.) und C, D eigentliche Punkte auf $[AB]$, A' ein eigentlicher Punkt auf $[AP]$, also auch $B' = ([A'D][BP])$ und $C' = ([C'C][A'D])$ eigentlich, und $AA'' = AA'$ nicht inzident auf $[AA']$, ebenso $BB'' = BB'$, $CC'' = CC'$, so ist $A'AD \cong A''AD$, $B'BD \cong B''BD$, $C'CD \cong C''CD$, also $A''B''C''D$ eine Gerade. Aus $\angle AA'D = AA''D$, $A'B' = A'D - B'D = A''D - B''D = A''B''$ folgt nun $A'A''B'' \cong A''A'B'$, also $\angle A''A'B'' = A'A''B'$; also (14) $A''AE' \cong A''AE''$, wenn $E' = ([AB][A'B''])$, $E'' = ([AB][A''B'])$ ist; also $AE' = AE''$, d. h. $E' = E''$ oder $([A'B''][A''B'])$ liegt auf $[AB]$. Dasselbe folgt für $([A'C''][A''C'])$ und $([B'C''][B''C'])$, also durch den Desarguesschen Satz aus $A'B''C'$, $A''B'C''$, daß $[A'A'']$, $[B'B'']$, $[C'C'']$ durch einen Punkt, also durch P gehen. Demnach gehen alle Senkrechten von $[AB]$ und nur diese durch P. Durch kongruente Übertragung der Figur $ABCP$ an dieselbe oder eine andere Gerade $[A_1B_1]$ ergibt sich dasselbe für diese in jeder ihrer Ebenen.



Sind jetzt $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ zwei beliebige Gerade einer Ebene (s. Fig.), so fälle man von A (auf $\mathfrak{G}$) ein Lot AB auf $\mathfrak{H}$ und errichte in A auf

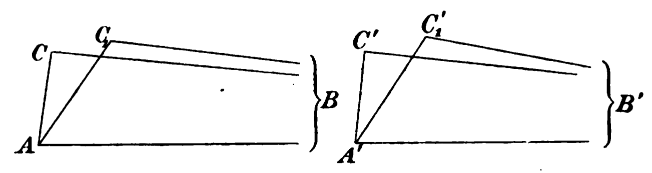


$[AB]$ das Lot $\mathfrak{G}_1$; $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}$ schneiden sich in C. Der eine der beiden Winkel zwischen $\mathfrak{G}$ und $[AB]$ ist kleiner als ein Rechter, also liegt der Schnittpunkt $D = (\mathfrak{G}[BC])$ zwischen B und C, ist also eigentlich.

39. Die Kongruenzsätze lassen sich auf die uneigentlichen Elemente ausdehnen, da diese auf Grund der eigentlichen Elemente definiert sind. Diese Ausdehnung soll im folgenden nur soweit stattfinden, wie davon später Gebrauch gemacht wird.

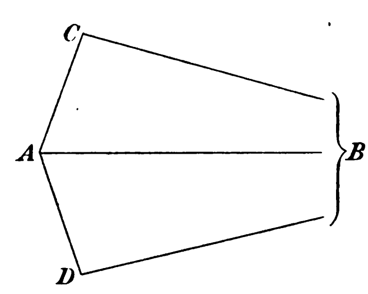
40. Definition: Ein eigentlicher und ein uneigentlicher Punkt bestimmen eine „uneigentliche Strecke". Zwei eigentliche Gerade eines uneigentlichen Punktes bestimmen einen „uneigentlichen Winkel".

41. Definition: Zwei uneigentliche Strecken AB, $A'B'$, wobei B, B' uneigentlich sind, heißen gleich, wenn man $\angle CAB = C'A'B'$, $CA = C'A'$, $\angle ACB = A'C'B'$ machen kann (s. Fig.). In der Tat ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Winkels CAB, der



Strecke CA, und der Ebenen $\{CAB\}$, $\{C'A'B'\}$. Denn ist $\angle C_1AB = C_1'A'B'$, $C_1A = C_1'A'$, und sind die entsprechenden Winkel der Ebenen gleich, so ergibt die kongruente Übertragung einer Desarguesschen Figur, zufolge der $[AB]$, $[CB]$, $[C_1B]$ durch einen Punkt gehen, daß auch $[A'B']$, $[C'B']$ und die mit $[C_1'A']$ den Winkel AC_1B bildende Gerade von C_1' durch einen Punkt gehen.

Macht man (s. Fig.) in derselben Ebene $\{CAB\}$, aber in der andern Halbebene von $[AB]$ Winkel $DAB = CAB$, $DA = CA$, $\angle B^0DA = BCA$, so beweist man leicht, daß $[DB^0]$ durch B geht (unter Benutzung des Satzes, daß in einer Ebene alle Lote von $[AB]$ durch einen Punkt gehen, s. 38).



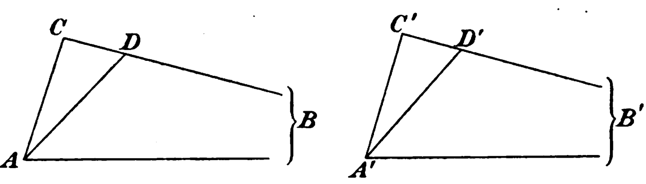
Dann gilt also auch der Satz: Sind zwei Strecken einer dritten gleich, so sind sie einander gleich.

42. Satz: Stimmen zwei gleiche uneigentliche Strecken AB, AB_1 einer Halbgeraden im eigentlichen Endpunkte überein, dann auch im uneigentlichen; sind also A, $AB]$ und A_1B_1 gegeben, so findet man B eindeutig so, daß $AB = A_1B_1$ ist.

Beweis: Ist $AB = AB_1$, A eigentlich, $\angle CAB = CAB_1$, $CA = CA$, so muß $\angle ACB = ACB_1$, also $[CB] = [CB_1]$, $B = B_1$ sein.

43. Definition: Zwei uneigentliche Winkel ABC, $A'B'C'$ heißen gleich (s. Fig. S. 249), wenn man $AC = A'C'$, $\angle CAB = C'A'B'$,

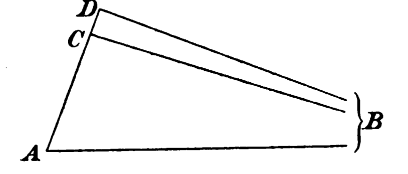
$\angle ACB = A'C'B'$ machen kann. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Punkte A und C auf den Schenkeln. Denn macht man z. B.



$CD = C'D'$, so ist $ACD \cong A'C'D'$, also $AD = A'D'$, $\angle DAB = D'A'B'$, $\angle ADB = A'D'B'$.

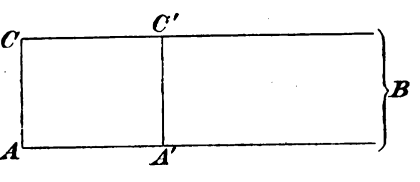
44. Satz: Stimmen zwei gleiche uneigentliche Winkel ABC, ABD derselben Halbebene in einem Schenkel überein, dann auch im andern.

Beweis: Macht man (s. Fig.) $\angle CAB = DAB$, so liegen C, D, A in einer Geraden, und es muß (nach 43) $CA = DA$, also $C = D$, also $[CB] = [DB]$ sein.



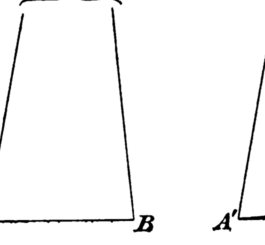
45. Satz: Stimmen in Nicht-Euklidischer Geometrie zwei gleiche uneigentliche Strecken AB, $A'B$ einer Geraden in ihrem uneigentlichen Endpunkt B überein, dann auch in ihrem eigentlichen.

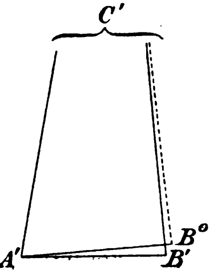
Beweis: Macht man (s. Fig.) $CAB = C'A'B =$ einem Rechten, $CA = C'A'$, so muß (41) $\angle ACB = A'C'B$ sein; also ist (43) $\angle ABC = A'BC'$, also (44) $[BC] = [BC']$, d. h. C, C', B liegen in einer Geraden; dann ist aber $\angle BCA = C'CA = CC'A' =$ 2 Rechten $- BC'A'$; also müßte $\angle BCA = BC'A' =$ einem Rechten sein, was (53) nur im Euklidischen Fall statthat.



46. Satz: Der Kongruenzgrundsatz 11 gilt auch für Dreiecke mit einem uneigentlichen Eckpunkt.

Beweis: Ist erstens $\angle CAB = C'A'B'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, A, B, A', eigentlich, C uneigentlich, also auch B' eigentlich, C' uneigentlich, so folgt wegen $AC = A'C'$ (nach 41) auch $\angle ABC = A'B'C'$, und dann (nach 43) $\angle ACB = A'C'B'$.





Ist zweitens (s. Fig.) $\angle ACB$

$= A'C'B'$, $CA = C'A'$, $CB = C'B'$, so sei $\angle CAB = C'A'B^0$, $AB = A'B^0$, also (41), wegen $AC = A'C'$, auch $\angle CBA = C'B^0A'$. Dann müßte (43) $\angle ACB = A'C'B^0$, also (44) B^0 auf $[C'B']$ und $C'B_0 = CB = C'B'$, also (45) $B^0 = B'$, also $\angle C'A'B' = CAB$ sein; was zu beweisen war.

47. Um von einem uneigentlichen Punkte C auf eine eigentliche Gerade $[AB]$ ein Lot zu fällen, verbinde man C mit dem Schnittpunkt zweier Lote von $[AB]$ in $\{ABC\}$ (vgl. 38).

48. Um einen uneigentlichen Winkel ACB zu halbieren, halbiere man (s. Fig.) $\angle ABC$ durch MB, $\angle CAB$ durch MA; ziehe $[MC_1] \perp [AB]$, C_1 auf $[AB]$, mache $BC_1 = BA_1$, A_1 auf $BC]$, $AC_1 = AB_1$, B_1 auf $AC]$, und halbiere $\angle A_1MB_1$ durch MC^0. Dann ist MC^0 die Winkelhalbierende von ACB. Denn es ist $MBC_1 \cong MBA_1$, $MAC_1 \cong MAB_1$, also $MA_1 = MB_1$, $CA_1M = CB_1M$; also

$$M([MC^0][AC]) = M(MC^0][BC]),$$

d. h. (42) $[MC_0]$ geht durch C, und es ist (nach 43) $\angle MCA_1 = MCB_1$.

Die Schließungssätze.

49. Für den ebenen Desarguesschen Satz ist ein Beweis auf Grund der Kongruenzsätze allein ohne Annahme der räumlichen Verknüpfungssätze bisher nicht gegeben worden.*) Dagegen kann man unter Voraussetzung des Desarguesschen Satzes und der Kongruenzaxiome den Pascalschen Satz beweisen.**) Unter Voraussetzung des Desarguesschen Satzes ist die ebene Geometrie Schnitt einer räumlichen; man kann daher ohne weiteres in der räumlichen operieren. Alsdann ist (s. II 60 S. 68) der Pascalsche Satz, daß $([AB'][BA'])$, $([AC'][CA'])$, $([BC'][CB'])$ auf einer Geraden liegen, wenn A, B, C auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ und A', B', C' auf einer Geraden $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ in einer Ebene liegen, gleichwertig dem Satze: wenn von den 16 Schnittpunkten eines unebenen Geradenquadrupels $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ mit einem

*) Für den Fall, daß auf jeder Geraden mehr als ein uneigentlicher Punkt liegt, geht die Möglichkeit eines solchen Beweises hervor aus Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Math. Ann. 57 (1903) p. 137 = Grundlagen der Geometrie 2. Aufl. (Leipzig 1903) p. 107 Anhang III.

**) Vgl. Schur, Math Ann. 51 (1899) p. 401.

unebenen Geradenquadrupel $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2'$, $\mathfrak{G}_3'$ 15 vorhanden sind, existiert auch der sechzehnte. Es kommt daher nur darauf an, gerade Linien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2'$, $\mathfrak{G}_3'$ durch resp. A, B, C, A', B', C' so zu legen, daß die Geraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ alle Geraden $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_1'\mathfrak{G}_2'\mathfrak{G}_3'$ treffen, aber $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ nicht einander und auch $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_1'\mathfrak{G}_2'\mathfrak{G}_3'$ nicht einander schneiden. Hierzu führen wir den Begriff der Spiegelung an einer Ebene Σ ein: Zwei Punkte P, P' heißen Spiegelbilder in bezug auf Σ, wenn die Strecke PP' durch Σ senkrecht halbiert wird. Die Definition ist mit Rücksicht auf 27 nicht zweideutig. Zwei Gerade heißen Spiegelbilder von einander, wenn die Punkte der einen die Spiegelbilder der Punkte der andern sind; sie schneiden sich also auf der Spiegelebene Σ. Dann gilt der Satz:

50. Satz: Schneiden sich drei Ebenen Σ_1, Σ_2, Σ_3 in einer Geraden $\mathfrak{G}$, so setzen sich die drei Spiegelungen an ihnen zu einer einzigen an einer Ebene Σ von $\mathfrak{G}$ zusammen, so daß der Winkel $\Sigma_1\Sigma_2$ dem Winkel $\Sigma\Sigma_3$ gleich ist.

Beweis: Sind P und P_1 Spiegelbilder in bezug auf Σ_1, P_1 und P_2 in bezug auf Σ_2, P_2 und P_3 in bezug auf Σ_3, so liegen (wie auf Grund von 30 zu beweisen ist) P, P_1, P_2, P_3 in einer zu $\mathfrak{G}$ senkrechten Ebene E. Ist $[\mathsf{E}\Sigma] = \mathfrak{S}$, $[\mathsf{E}\Sigma_1] = \mathfrak{S}_1$, $[\mathsf{E}\Sigma_2] = \mathfrak{S}_2$, $[\mathsf{E}\Sigma_3] = \mathfrak{S}_3$, $(\mathsf{E}\mathfrak{G}) = G$, $([PP_3]\mathfrak{S}) = Q$, so ist (s. Fig.)

$$\angle PG\mathfrak{S} = PGP_1 + P_1GP_2 + P_2G\mathfrak{S} = 2\mathfrak{S}_1G\mathfrak{S}_2 + P_2G\mathfrak{S} = 2\mathfrak{S}G\mathfrak{S}_3 + P_2G\mathfrak{S} = \mathfrak{S}G\mathfrak{S}_3 + P_2G\mathfrak{S}_3 = P_3G\mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_3G\mathfrak{S} = P_3G\mathfrak{S},$$

und $$GP = GP_1 = GP_2 = GP_3, \quad \text{also} \quad PGQ \cong P_3GQ,$$

was zu beweisen war.

Zusatz: Die Mittellote der drei Seiten eines Dreiecks gehen durch einen Punkt. Denn legt man $\mathfrak{S}_3$ durch P_2, so wird $P_2 = P_3$ und $\mathfrak{S}$ Mittellot von PP_2.

Mit Rücksicht auf (39 ff.) gelten diese Sätze auch, wenn G ein uneigentlicher Punkt ist.

Nunmehr beweist man leicht den Pascalschen Satz:

51. Satz: Schneiden sich die Geraden $[ABC] = \mathfrak{G}$ und $[A'B'C'] = \mathfrak{G}'$, so liegen

$$([AB'][A'B]), \quad ([AC'][A'C]), \quad ([BC'][B'C])$$

auf einer Geraden.

Beweis: Ist $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}') = O$, $OP = OP'$, P auf $\mathfrak{G}$, P' auf $\mathfrak{G}'$, M Mittelpunkt von PP', und geht Σ durch $[OM]$ und ist senkrecht $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\}$, so sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ Spiegelbilder in bezug auf Σ. Es sei $\mathfrak{H}$ in Σ, nicht senkrecht $\{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\}$, $\Sigma_1 = \{\mathfrak{H}A\}$, $\Sigma_2 = \{\mathfrak{H}B\}$, $\Sigma_3 = \{\mathfrak{H}C\}$, $\Sigma_1' = \{\mathfrak{H}A'\}$, $\Sigma_2' = \{\mathfrak{H}B'\}$, $\Sigma_3' = \{\mathfrak{H}C'\}$, ferner seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_k'$ Spiegelbilder in bezug auf Σ_k, und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}_k$ Spiegelbilder in bezug auf Σ_k', also $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1') = A$, $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_2') = B$, $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}_3') = C$, $(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_1) = A'$, $(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_2) = B'$, $(\mathfrak{G}'\mathfrak{G}_3) = C'$. Die Spiegelungen an Σ_k, Σ, Σ_k' setzen sich (50) zu einer zusammen, in welcher $\mathfrak{G}_k'$ und $\mathfrak{G}_k$ Spiegelbilder sind, sich also schneiden. Damit ist nach den Bemerkungen in 49 der Beweis vollendet.

Die Winkelsumme im Dreieck.

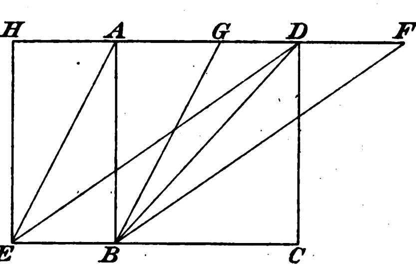
52. Satz: Ist in einem Dreieck ABC die Winkelsumme gleich 2 Rechten, dann zerfällt es durch eine „Höhe" $[AD] \perp [BC]$ in zwei rechtwinklige Dreiecke mit derselben Eigenschaft (s. Fig.).

Beweis: Man mache $\angle EAB = \beta$, $\angle FAC = \gamma$, $EA = DB$, $FA = DC$; so ist $EAB \cong DBA$, $FAC \cong DCA$, also $\angle FCA = DAC$, $FAE = 2$ Rechten, $FE = FA + AE = CD + DB = CB$, $FC = AD = EB$, also weiter $FEB \cong FCB$, $\angle FCB = 1$ Rechten, also in ACD: Winkelsumme $= 2$ Rechten, ebenso in ABD.

53. Satz: Ist in einem Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten, dann in jedem.

Beweis: Es genügt nach 52, diesen Satz für rechtwinklige Dreiecke ABC und A_1BE zu beweisen (s. Fig.). Ist in ABC die Winkelsumme 2 Rechte, so wird bewiesen, das dasselbe für ABE, also ebenso für A_1BE stattfindet. Es sei nunmehr (s. Fig. S. 253) $ABC \cong CDA$, also $ABCD$ ein „Rechteck", und es sei $AH = BE = DF = AG$, so ist $EDB \cong DBF$ ($\angle D = \angle B$, $BD = DB$, $DF = BE$), $ABE \cong AGB$ ($\angle A = \angle B$,

$AB = BA$, $AG = EB$), $ADE \cong GFB$ ($AD = GF$, $AE = GB$, $ED = BF$), also $HDE \cong AFB$ ($HD = AF$, $ED = BF$, $\angle HDE = \angle AFB$), also $HE = AB$, $\angle AHE = \angle HEB = 1$ Rechten, $AHE \cong ABE$, also die Winkelsumme in $ABE = 2$ Rechten.



54. Satz: In der Euklidischen Geometrie, wo auf jeder Geraden genau ein uneigentlicher Punkt liegt, beträgt die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte.

Beweis: Ist (s. Fig.) $[CB] \perp [AB]$, $[DA] \perp [AB]$, so schneidet (wegen 38) $[DA]$ die Gerade $[BC]$ in dem uneigentlichen Punkte von $[BC]$. Ist noch $[CD] \perp [BC]$, $[DE] \perp [CD]$, so muß auch $[DE]$ durch den uneigentlichen Punkt von $[BC]$ gehen, also mit $[AD]$ übereinstimmen, also ist ADC ein Rechter, also (s. 53) die Winkelsumme des Dreiecks ABC, also jedes Dreiecks gleich zwei Rechten.

55. Definition: Die Menge der Endpunkte gleich langer Lote einer Geraden und in einer Ebene der Geraden heißt eine Abstandskurve der Geraden.

56. Satz: Beträgt die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte, so ist jede Abstandskurve einer Geraden $\mathfrak{G}$ eine Gerade $\mathfrak{H}$, und eine Abstandskurve von $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{G}$.

Beweis: (s. Fig. zu 53). Es ergab sich $AB = CD = EH$ senkrecht $[BC]$ und $[AD]$ und A, D, H in einer Geraden, B, C, E in einer Geraden.

57. Satz: Beträgt die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte und nennt man zwei Gerade, von denen jede eine Abstandskurve der andern ist, parallel, dann gelten die Sätze: sind zwei Gerade einer dritten parallel, dann sind sie einander parallel; parallele Gerade bilden mit jeder sie schneidenden Geraden gleiche Winkel; durch jeden Punkt P gibt es zu jeder Geraden $\mathfrak{G}$ genau eine Parallele.

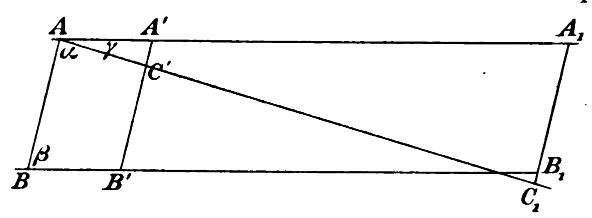
Beweis: Sind in einer Ebene $A_1A = B_1B$ auf $[AB]$ senkrecht und in derselben oder einer andern Ebene $A_2A = B_2B$ auf $[AB]$ senkrecht, ist aber dabei $([A_1B_1][AB])$, $([A_2B_2][AB])$ nicht der Mittelpunkt von AB, so ist $AA_1A_2 \cong BB_1B_2$, $A_1AB \cong B_1BA$, also $A_1A_2 = B_1B_2$, $AB_1 = BA_1$, ebenso $AB_2 = BA_2$. Ferner sei $[A_1A'] \perp [AA_2]$, A' auf $[AA_2]$, $BB' = AA'$, B' auf $[BB_2]$, also $AA_1A' \cong BB_1B'$, und $[A_1A'] \perp \{ABA_2\}$, also $\perp [A'B_2]$, ebenso $[B_1B'] \perp [B'A_2]$, und

$A_2A' = B_2B'$, $A_2B_2A' \simeq B_2A_2B'$, also $A_2B' = B_2A'$, also $A_1A'B_2 \simeq B_1B'B_2$, also $A_1B_2 = A_2B_1$, also $A_1A_2B_2B_1$ ein Rechteck; dann folgt aus $[A_1B_1] \parallel [AB]$ und $[A_2B_2] \parallel [AB]$, daß auch $[A_1B_1] \parallel [A_2B_2]$ ist. — Die Parallelen $[AD]$, $[BE]$ (s. Fig. zu 53) bilden mit $[DE]$ die gleichen Winkel ADE und DEB, wie in 53 bewiesen. — Man fälle von P ein Lot $[PQ]$ auf $\mathfrak{G}$ und errichte in P ein Lot $\mathfrak{H}$ auf $[PQ]$ in $\{P\mathfrak{G}\}$; dann ist $\mathfrak{H} \parallel \mathfrak{G}$ offenbar die einzige Parallele durch P zu $\mathfrak{G}$.

58. Satz: Ist die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten, so schneiden sich je zwei nicht parallele Geraden einer Ebene in einem eigentlichen Punkte.

Beim Beweise dieses Satzes ist die Meßbarkeit eine notwendige Voraussetzung.

Beweis: Es sei (s. Fig.) $\alpha + \beta < 2$ Rechte, $\alpha + \beta + \gamma = 2$ Rechte, also (nach 57) $[AA'] \parallel [BB']$; ferner sei $[AB] \parallel [A'B']$, und n eine ganze Zahl, für welche $n \cdot A'C' > AB$ ist. Ferner sei $AA_1 = nAA'$,



$[A_1C_1] \parallel [AB]$, $A_1C_1 = n \cdot A'C'$. Dann folgt aus kongruenten Dreiecken $A_1AC_1 = \gamma$. Nun ist $A_1AC_1 > A_1AB_1$ und $BAC_1 < BAB_1$, d. h. die Geraden $[AC_1]$, $[AA']$ sind getrennt durch $[AB]$, $[AB_1]$; dasselbe gilt also für ihre Schnittpunkte mit $[BB_1]$, also ist $([AC_1][BB_1])$ von dem uneigentlichen Punkte $([AA_1][BB_1])$ getrennt durch die beiden eigentlichen Punkte BB_1, ist also eigentlich.

Um die Voraussetzung der Meßbarkeit als hierbei notwendig zu erweisen, braucht man nur eine geeignete Koordinatengeometrie in einem nicht meßbaren Zahlensystem heranzuziehen. Wir nehmen die Zahlen von der Form $A = a\tau^n + a_1\tau^{n_1} + a_2\tau^{n_2} + \cdots$, wo a, a_1, a_2, ..., und $n < n_1 < n_2 < \cdots$ beliebige reelle Zahlen sind, und $A > B$ heißt, wenn $A - B > 0$ ist, und $A > 0$ heißt, wenn $a > 0$ ist; n heiße die Ordnung der Zahl und Zahlen einer positiven Ordnung heißen eigentlich, die andern uneigentlich. Sind x, y Zahlen dieses Systems, so heiße $x + iy = z$ ein „Punkt“. Sind z_1, z_2 zwei verschiedene Punkte, so heißen die in $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ für reelle λ_1, λ_2, und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ enthaltenen Punkte „Gerade“ $[z_1 z_2]$. Ein Punkt $x + iy$ heißt „eigentlich“, wenn x und y eigentlich sind. Eine Gerade heißt eigentlich, wenn sie wenigstens einen eigentlichen Punkt enthält.

Dann liegen auf jeder Geraden $[z_1 z_2]$ uneigentliche Punkte. Denn ist z_1 von der Ordnung n_1, z_2 von der Ordnung $n_2 \geqq n_1$, so ist z. B. $(1 - \tau^{-n_2}) z_1 + \tau^{-n_2} z_2$ ein uneigentlicher Punkt von $[z_1 z_2]$. Auf jeder eigentlichen Geraden liegen mehrere eigentliche Punkte; denn sind z_1 und $\tau^n z_2$ eigentlich, $n > 0$, so ist z. B. $(1 - \tau^n) z_1 + \tau^n z_2$ ein eigentlicher Punkt der Geraden $[z_1 z_2]$.

Jetzt ordne man die Punkte z_1, z_2 einer Geraden $[z_1 z_2]$ so: es heiße z_1 vor z_2, wenn entweder $x_2 - x_1 > 0$ oder $x_2 - x_1 = 0$ und $y_2 - y_1 > 0$ ist. Sind jetzt z_1, z_2 eigentliche Punkte, z', z'' uneigentliche Punkte der Geraden $[z_1 z_2]$, so sind $z' - z_1$ und $z' - z_2$ gleichzeitig $>$ oder < 0, und $z'' - z_1$, $z'' - z_2$ gleichzeitig $>$ oder < 0, also z_1, z_2 durch z', z'' niemals getrennt.

Figuren heißen kongruent, wenn sie durch „Schiebung“

$$\bar{z} = z + (\xi + i\eta)$$

und durch „Drehung“

$$\bar{z} = \frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} z$$

ineinander übergehen, wo ξ, η, a, b Zahlen des Systems sind. Eine „eigentliche“ Schiebung sei eine solche, welche wenigstens einen eigentlichen Punkt in einen eigentlichen Punkt überführt. Eine eigentliche Schiebung führt dann jeden eigentlichen Punkt in einen eigentlichen Punkt über; denn ist z_1 und $\bar{z}_1 = z_1 + (\xi + i\eta)$ eigentlich, so ist auch $\xi + i\eta = \bar{z}_1 - z_1$ eigentlich, also auch $\bar{z}_2 = z_2 + (\xi + i\eta)$ eigentlich, wenn z_2 eigentlich ist. Durch eine Drehung geht jeder eigentliche Punkt in einen eigentlichen über, da $\frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ stets von der Ordnung 0 ist.

Demnach sind alle Grundsätze der uneigentlichen Elemente erfüllt. Das Bestehen der Verknüpfungs-, Anordnungs- und Kongruenzsätze folgt z. B. ohne weiteres daraus, daß diese Geometrie mit der gewöhnlichen Koordinatengeometrie der Euklidischen Ebene wesentlich übereinstimmt. Aber der Euklidische Grundsatz: zwei nicht parallele Gerade einer Ebene schneiden sich, gilt nicht, da man ja jeden beliebigen uneigentlichen Punkt z_0 mit zwei eigentlichen z_1, z_2 durch zwei eigentliche Gerade $[z_0 z_1]$, $[z_0 z_2]$ verbinden kann, die sich also in dem uneigentlichen Punkte z_0 schneiden, ohne parallel zu sein; denn durch keine eigentliche Schiebung $\bar{z} = z + \zeta$ gehen die eigentlichen Punkte von $[z_0 z_1]$ in die eigentlichen Punkte von $[z_0 z_2]$ über, da aus $z_0 + \lambda_1 (z_1 - z_0) + \zeta = z_0 + \lambda_2 (z_1 - z_0)$ stets

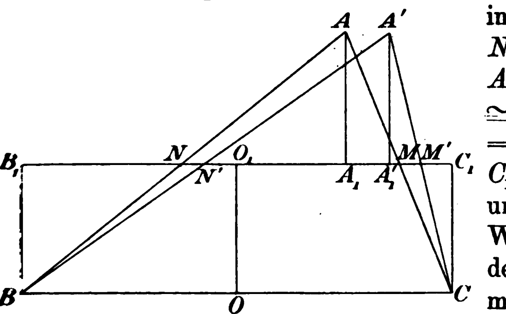
$$\zeta = \lambda_2 (z_2 - z_0) - \lambda_1 (z_1 - z_0),$$

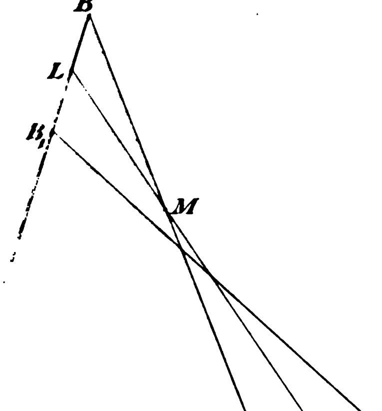
also im allgemeinen ζ uneigentlich folgt.

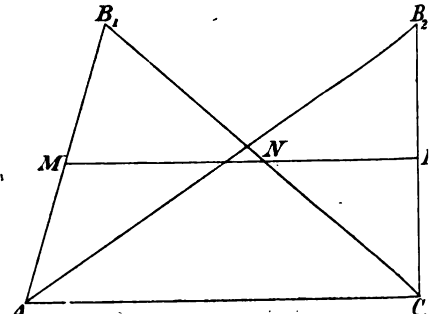
59. Satz: Gibt es keine uneigentlichen Punkte, so ist in jedem Dreieck die Winkelsumme größer als zwei Rechte.

Beweis: Zunächst folgt (s. 38 und Fig. zu 38), daß alle Lote einer Geraden $[AB]$, die in einer Ebene liegen, durch einen Punkt P gehen. Ferner ist $ABP \simeq BAP$, also $PA = PB$, ebenso $PA = PC$ usw. Trägt man das Dreieck ABP kongruent an eine andere Gerade an, so ergibt sich dasselbe für diese. D. h. der Lotschnittpunkt jeder Geraden in einer Ebene hat von der Geraden einen bestimmten Abstand, der für alle Geraden der gleiche ist. Er werde mit ϱ bezeichnet.

Ist nun (s. Fig.) $BN = NA$, $AM = MC$, $[AA_1] \perp [MN]$, $MC_1 = MA_1$, $NB_1 = NA_1$, so ist $ANA_1 \simeq BNB_1$, $AMA_1 \simeq CMC_1$, also die Winkelsumme in ABC gleich $B_1BC + C_1CB$. Wird jetzt BA' von $[NM]$ in N' halbiert, und macht man $N'A_1' = N'B_1$, halbiert ferner $A_1'C'$ in M', so ist $BB_1N' \simeq A'A_1'N'$, also $A'A_1' = BB_1 = CC_1$, also $A_1'M'A' \simeq C_1M'C$, also $A'M'C$ gerade und $A'M' = M'C$ und die Winkelsumme in $A'BC$ gleich der in ABC. Hierdurch kann man das $\triangle ABC$ mit Erhaltung der Winkelsumme in ein anderes mit einer Seite $= \varrho$ verwandeln (s. die zweite Fig.). Macht man nämlich $AC_1 = \varrho$, $CN = NC_1$, $CM = MB$, $([MN][AB]) = L$, $BL = LB_1$, so ist in den Dreiecken BC_1C und BC_1B_1 die Winkelsumme gleich, also auch in ABC und AB_1C_1. Man kann



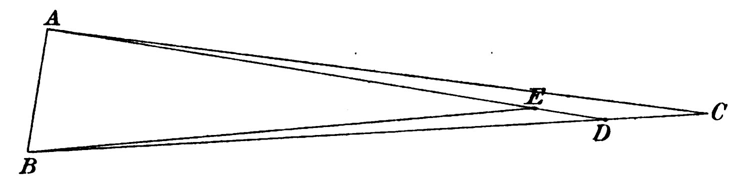




zweitens den Winkel bei C_1 zu einem Rechten machen, (s. die dritte Fig.), indem man $AM = MB_1$, $C_1N = NB_1$, $[C_1L] \perp [AC_1]$, $B_2L = LC_1$

macht. Alsdann ist also auch der Winkel AB_2C_1 ein Rechter, also die Winkelsumme um den Winkel B_2AC_1 größer als zwei Rechte.

60. Wir können nunmehr den Fall ausschließen, daß sich zwei Lote einer Geraden, die in einer Ebene liegen, in einem eigentlichen Punkte treffen, da sonst (38) keine uneigentlichen Punkte existieren, also (59) die Winkelsumme in jedem Dreieck größer als zwei Rechte ist. Wir können also annehmen, daß in jedem Dreieck höchstens ein

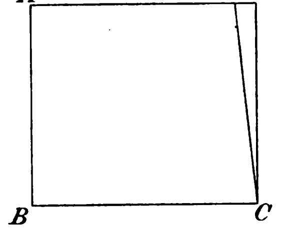


Winkel nicht kleiner als ein Rechter ist. Denn wären etwa (s. Fig.) in ABC jeder der Winkel bei A und B nicht kleiner als ein Rechter, und BAD ein Rechter, ABE ein Rechter, so wäre D nicht außerhalb B, C, also eigentlich, und E nicht außerhalb A, D, also eigentlich. Demnach hätten zwei Lote $[DA]$, $[DB]$ einer Geraden einen eigentlichen Schnittpunkt D, also (38) existierten keine uneigentlichen Punkte.

61. Satz: Existiert ein Dreieck, in welchem die Winkelsumme kleiner, resp. gleich, resp. größer als zwei Rechte ist, so existiert ein ebenes Viereck mit drei rechten Winkeln, in dem der vierte Winkel kleiner, resp. gleich, resp. größer als ein Rechter ist.

Beweis: (s. die erste Fig. zu 59.) Ist $BO = OC$, $B_1O_1 = O_1C_1$, so ist $BB_1O_1 \simeq CC_1O_1$, also $BO_1 = CO_1$, also $BOO_1 \sim COO_1$, also BOO_1 ein Rechter. Ferner ist $BB_1C_1 \simeq CC_1B_1$, also $BC_1 = CB_1$, also $B_1BC \simeq C_1CB$, also $B_1BO = C_1CO$, also $B_1BO \simeq C_1CO$, also $B_1O = C_1O$, also $B_1OO_1 \sim C_1OO_1$, also B_1O_1O ein Rechter. Ferner fand sich die Winkelsumme des Dreiecks ABC gleich $B_1BO + C_1CO = 2B_1BO$; also ist $B_1BO <$, resp. $=$, resp. $>$ ein Rechter, also BB_1O_1O ein Viereck der verlangten Beschaffenheit.

62. Satz: Je nachdem, ob in einem ebenen Viereck $ABCD$ mit drei rechten Winkeln A, B, C der vierte Winkel D kleiner, gleich oder größer als ein Rechter ist, ist AD größer, gleich oder kleiner als BC, und ebenso CD größer, gleich oder kleiner als AB.

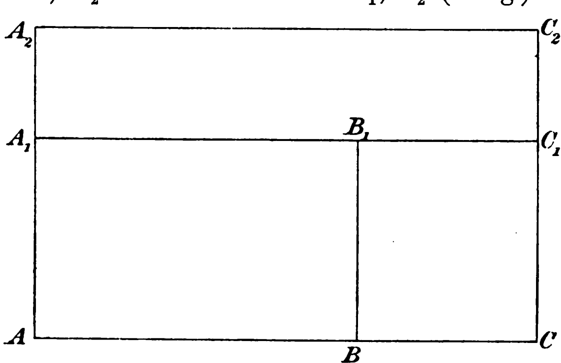


Beweis: Ist erstens (s. Fig.) $BC = AD' < AD$, so ist $ABC \simeq BAD'$, also $AC = BD'$, also $AD'C \sim BCD'$, also $AD'C = BCD' < 1$ Rechter, also $DD'C > 1$ Rechter, also (wegen 60) $ADC < 1$ Rechter.

Ist zweitens (s. Fig.) $BC = AD' > AD$, so ist ebenso $AD'C = BCD$, < 1 Rechter, also $D'DC < 1$ Rechter, also $ADC > 1$ Rechter. Also folgt drittens aus $BC = AD$, daß ADC ein Rechter sein muß und alle drei Sätze umgekehrt gelten.

63. Satz: Je nachdem, ob in einem Dreieck die Winkelsumme größer, gleich oder kleiner als zwei Rechte ist, ist dasselbe in jedem Dreieck der Fall.

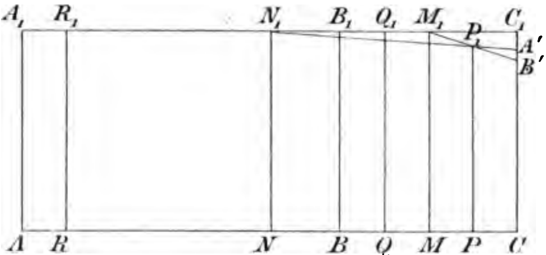
Beweis: Mit Rücksicht auf 61 hat man nur zu beweisen, daß in zwei ebenen Vierecken ABB_1A_1, ACC_2A_2 mit je drei rechten Winkeln A, B, A_1 und A, C, A_2 die vierten Winkel B_1, C_2 (s. Fig.) stets zugleich größer, gleich oder kleiner als ein Rechter sind. Ist



$$C_1 = ([A_1B_1][CC_2]),$$

so genügt es zu zeigen, daß A_1B_1B und A_1C_1C stets zugleich größer, gleich oder kleiner als ein Rechter sind, da dann dasselbe für A_1C_1C und A_2C_2C folgt. Dazu ist nach 62 nur erforderlich zu zeigen, daß z. B. nicht $BB_1 < AA_1 < CC_1$ sein kann. Daher können AB, AC inzident, also A nicht zwischen B, C angenommen werden. Außerdem möge B zwischen A und C liegen.

Man mache zum Zweck des Beweises (s. Fig.) $CM = MB$, $CN = NA$, $CA' = AA_1$, $CB' = BB_1$, $MM_1 \perp AC$, $NN_1 \perp AC$, so sind die Punkte M_1, N_1 (ebenso später Q_1, R_1, S_1) eigentlich und in bezug auf $A_1B_1C_1$ so geordnet, wie die entsprechenden Punkte M, N, ... in bezug auf ABC, da z. B. NN_1 (wegen 52) nicht die Seite CC_1 des Dreiecks ACC_1, also notwendig die Seite AC_1 selbst, also in einem eigentlichen Punkte und dann in dem Dreieck AA_1C_1 (wegen 60) nicht die Seite AA_1,



also notwendig die Seite $A_1 C_1$ selbst, also zwischen A_1 und C_1, d. h. in einem eigentlichen Punkte trifft. Nunmehr ist auch $P_1 = ([M_1 B'] [N_1 C'])$ eigentlich, weil A' zwischen B' und C_1 liegt und die Transversale $[A'N_1]$ die Seite $C_1 M_1$ des Dreiecks $C_1 M_1 B'$ nicht trifft, also die Seite $B'M_1$ zwischen B' und M_1 treffen muß. Es sei $[P_1 P] \perp [AC]$, also P zwischen M und C, $PM = MQ$, $PN = NR$, $[QQ_1] \perp [AC]$, $[RR_1] \perp [AC]$. Dann ist $BB_1 QQ_1 MM_1 \simeq CB'PP_1 MM_1$, also $QQ_1 = PP_1$, und ebenso

$$AA_1 RR_1 NN_1 \simeq CA'PP_1 NN_1,$$

also $RR_1 = PP_1$. Ist noch $RS = SQ$, $[SS_1] \perp [AC]$, so ist wegen $RR_1 = QQ_1$ auch $RR_1 SS_1 \simeq QQ_1 SS_1$, also $RSS_1 = QSS_1$ ein Rechter und $R_1 S_1 S = Q_1 S_1 S$ ein Rechter. Da nun B und C, also M und N, also Q und R, also S alle auf derselben Seite von A liegen, so ist $S \neq A$, also $AA_1 SS_1$ ein Rechteck, woraus (53) für das Dreieck ASA_1, also für jedes die Winkelsumme gleich zwei Rechten folgen würde. Demnach folgt aus $BB_1 < AA_1$ stets $CC_1 \leqq AA_1$, also mit Rücksicht auf 53 stets $CC_1 < AA_1$. Genau ebenso beweist man, daß aus $BB_1 > AA_1$ stets $CC_1 > AA_1$ folgt. Daß aber aus $BB_1 = AA_1$ stets $CC_1 = AA_1$ folgt, geht schon aus 53 hervor.

Zusatz: Aus $BB_1 <$ resp. $> CC_1$ und $AC > AB$ folgt $AA_1 <$ resp. $> BB_1$. Beweis ebenso.

64. Definition: In einer Ebene heißt die Menge der Punkte P, für welche OP einer gegebenen Strecke gleich ist, „Kreis" um den „Mittelpunkt" O mit dem „Radius" OP. Sind $OP = OQ$ zwei nicht inzidente Radien einer Geraden, so heißt PQ ein Durchmesser, $[PQ]$ eine Zentrale des Kreises. Ist R ein Punkt des Kreises, PQ ein Durchmesser, so heißt der Winkel PRQ des Dreiecks mit der Seite PQ ein Winkel im Halbkreise.

P O Q R

65. Satz: Je nachdem die Winkelsumme im Dreieck kleiner, gleich oder größer als zwei Rechte ist, ist der Winkel im Halbkreis kleiner, gleich oder größer als ein Rechter.*)

Beweis: (s. Fig.) Aus $QOR \simeq ROQ$, $POR \simeq ROP$ folgt

$$2\,PRQ = PRQ + PRO + ORQ = RPO + RQO + PRQ \lesseqgtr 2 \text{ Rechte},$$

also

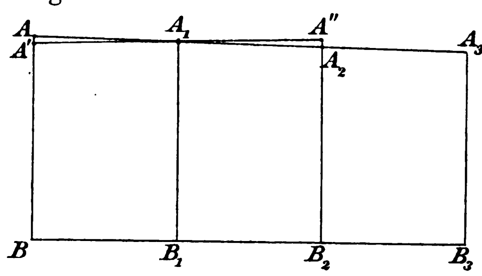
$$PRQ \lesseqgtr 1 \text{ Rechter}.$$

*) Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus (Mailand 1733). Theorema XVIII = Engel-Stäckel, Theorie der Parallellinien (Leipzig 1895) p. 72. Der Euklidische Fall dieses Satzes ist der Satz des Thales.

66. Satz: Ist die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte, so schneiden sich je zwei Gerade einer Ebene in einem eigentlichen Punkte.

Für diesen Satz ist die Meßbarkeit notwendige Voraussetzung.

Beweis: Nach 38 genügt es zu zeigen (s. Fig.), daß sich in einer Ebene zwei Lote $[AA_1]$, $[BB_1]$ einer Geraden $[AB]$ in einem eigentlichen Punkte schneiden. Es sei A_1 der Schnittpunkt des in A auf $[AB]$ und des in B_1 auf $[BB_1]$ errichteten Lotes, und es sei $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 =$ usw., $[A_2B_2]$, $[A_3B_3]$, $\ldots \perp [BB_1]$, A_2, A_3, $\ldots$ auf $[AA_1]$. Die Punkte A_1, A_2, $A_3, \ldots$ sind eigentlich; denn existieren überhaupt uneigentliche Punkte, so ist der Begriff „Strecke“ eindeutig bestimmt, und macht man $B_1\bar{A}_1 = BA$ und inzident B_1A_1, so ist $B_1\bar{A}_1 > B_1A_1$, also, da $\bar{A}_1$ eigentlich ist, und A_1 zwischen $\bar{A}_1$ und B_1 liegt, auch A_1 eigentlich; ebenso A_2, A_3 usw. Jetzt sei $[A'A_1A''] \perp [A_1B_1]$, A' auf $[AB]$ und A'' auf $[A_2B_2]$, so sind ebenso A', A'' eigentlich.



Nun ist $AB > A_1B_1 > A_2B_2 >$ usw. und es ist $AB - A_1B_1 < AB - A'B$ d. h. $< AA'$, und $A_2A'' = A''B_2 - A_2B_2 < A_1B_1 - A_2B_2$. Zeigen wir also, daß z. B. $AA' < A_2A''$ ist, so folgt $AB - A_1B_1 < A_1B_1 - A_2B_2$, ebenso $A_1B_1 - A_2B_2 < A_2B_2 - A_3B_3$, usw. Existiert also eine ganze Zahl n so, daß

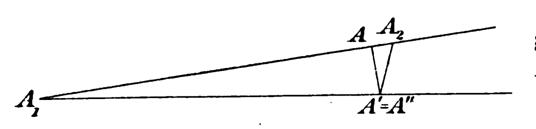
$$n(AB - A_1B_1) > AB$$

ist, so ist auch

$$(AB - A_1B_1) + (A_1B_1 - A_2B_2) + \cdots + (A_nB_n - A_{n+1}B_{n+1}) > AB,$$

woraus wie in 58 die Existenz eines eigentlichen Schnittpunktes folgt.

Nun ist (s. Fig.) in der Tat $AA' < A_2A''$, denn nach 69 liegt in dem Dreieck $A'AA_2$ dem größeren Winkel $A'AA_2 > A''A_2A$ die größere Seite $A''A_2 > AA'$ gegenüber.



Zwischen diesen Winkeln findet aber die behauptete Größenordnung (s. die erste Fig.) $BAA_1 > B_1A_1A_2$ und allgemein

$$B_{k-1}A_{k-1}A_k > B_kA_kA_{k+1}$$

statt; denn es ist

$$B_{k-1}A_{k-1}A_k + B_kA_kA_{k-1} > 2 \text{ Rechte},$$

da die Winkelsumme des Vierecks

$$B_{k-1}B_kA_kA_{k-1} > 4 \text{ Rechte ist.}$$

Um die Voraussetzung der Meßbarkeit als notwendig zu erweisen, betrachten wir wie in 58 eine Koordinatengeometrie in einem nicht meßbaren Zahlensystem. Die dortigen Festsetzungen mögen auch hier gelten, nur daß die Schiebungen durch die Transformation

$$\bar{z} = \frac{z + (\xi + i\eta)}{1 - z(\xi - i\eta)}$$

definiert sein mögen. Eine eigentliche Schiebung führt jeden eigentlichen in einen eigentlichen Punkt über. Denn setzt man $\xi + i\eta = \zeta$, $\xi - i\eta = \zeta'$, so folgt aus $\bar{z} - z = \zeta + z\bar{z}\zeta'$, daß, wenn z und $\bar{z}$ eigentlich sind, zugleich ζ eigentlich sein muß, da für ein uneigentliches ζ, also auch ζ' nicht $\bar{z} - z = \zeta + z\bar{z}\zeta'$ eigentlich sein könnte; und umgekehrt folgt, wenn ζ und z eigentlich sind, daß auch $\bar{z} = \frac{z + \zeta}{1 - z\zeta'}$ eigentlich ist, da der Nenner von der Ordnung Null ist.

Die Gültigkeit der übrigen Grundsätze der uneigentlichen Elemente folgt wie in 58, die Gültigkeit der Verknüpfungs-, Anordnungs-, Kongruenzsätze ohne weiteres daraus, daß diese Geometrie mit der sphärischen Geometrie wesentlich übereinstimmt. Demnach beträgt die Winkelsumme im Dreieck mehr als zwei Rechte, obwohl uneigentliche Punkte existieren.

67. Satz: Ist die Winkelsumme im Dreieck größer, resp. gleich, resp. kleiner als zwei Rechte, so existieren auf jeder Geraden kein, resp. ein, resp. mehr uneigentliche Punkte.

Beim Beweise dieses Satzes ist die Meßbarkeit eine notwendige Voraussetzung.

Beweis folgt aus 54, 58, 59, 66.

68. Der Satz 63 von der Winkelsumme im Dreieck ist neuerdings fälschlich Legendre zugeschrieben worden; er findet sich aber weder zuerst, noch überhaupt bei Legendre, sondern bei Saccheri und Lambert*) und ist von letzterem sogar ohne Benutzung der Stetigkeit oder der Meßbarkeit bewiesen worden. Lamberts Beweis ist im wesentlichen korrekt, wenn man davon absieht, daß auftretende Punkte ohne weiteres als eigentlich angesehen werden, ein Mangel, der auch neueren Publikationen anhaftet. Die Einfachheit der Mittel, mit denen die älteren Mathematiker diese elementargeometrischen Fragen angriffen, scheint heutzutage leider in Vergessenheit zu geraten. So ist der

*) Vgl. Stäckel und Engel, Die Theorie der Parallellinien (Leipzig 1895) p. 54, 56, 57; 180, 186, 192.

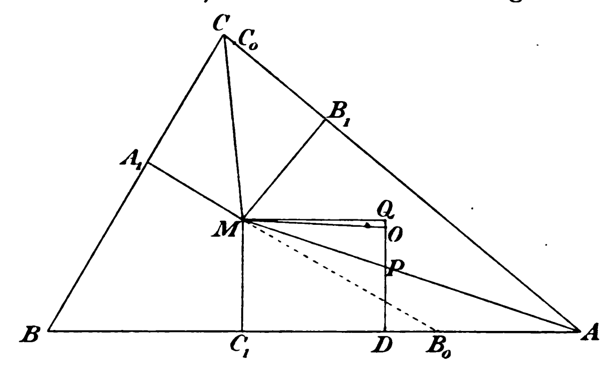
fragliche Satz in neuerer Zeit von Dehn*) und Schur**) mit Beweisen versehen worden, mit denen der Satz den ihm zukommenden Platz in der Elementargeometrie nicht einnehmen könnte. Der erstere konstruiert zu diesem Zwecke eine Pseudogeometrie, der letztere begründet dazu die analytische Nicht-Euklidische Geometrie.

Den Satz 59 hat, minder einfach, Dehn (l. c.) zuerst bewiesen. Der Satz 67 wird Legendre zugeschrieben, der aber nur bewies, daß die Winkelsumme nicht größer als zwei Rechte ist, unter der stillschweigenden Annahme uneigentlicher Punkte; die Bemerkung, daß dabei die Meßbarkeit eine notwendige Voraussetzung bildet, rührt von Dehn (l. c.) her. Jedoch weist Dehn nicht nach, daß die eingeführten uneigentlichen Elemente dem Verknüpfungs- und dem Anordnungsgrundsatz entsprechen.

Die gerade Linie als kürzeste.

69. Satz: In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten der größere der Winkel gegenüber, wenn als Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC die kleineren der Strecken AB, AC, BC genommen werden.

Beweis: (s. Fig.) Es seien $BM]$, $AM]$ die Mittelgeraden der Winkel CBA und CAB, die nach Voraussetzung kleiner als ge-



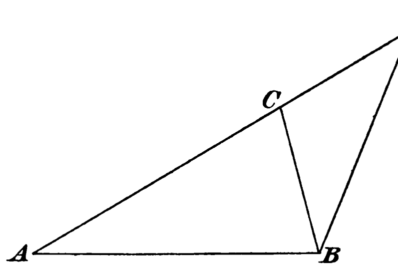
streckte sind. M ist eigentlich; denn existieren überhaupt uneigentliche Punkte, so liegt ($[BM][AC]$) zwischen A und C, ist also eigentlich, und dann liegt M zwischen B und ($[BM][AC]$), ist also eigentlich. Es sei $[MC_1] \perp [AB]$; C_1 auf $[AB]$ ist eigentlich, eindeutig (aus 38), $\neq B$ und liegt auf AB; denn ist erstens die Dreieckswinkelsumme nicht größer als zwei Rechte, existieren also un-

*) Inaugural-Dissertation, Göttingen 1900 = Math. Ann. 53 (1900) p. 404.
**) Math. Ann. 55 (1902) p. 265.

eigentliche Punkte, und läge z. B. B zwischen A und C_1, so wäre MBC_1 spitz (s. 60), also ABM stumpf gegen die Annahme. Ist zweitens die Dreieckswinkelsumme größer als zwei Rechte, und wäre C_1 nicht auf AB, so wäre MBC_1 ein Dreieck mit einem rechten und einem stumpfen Winkel, also wären uneigentliche Punkte nicht vorhanden. Ist also $[C'A] \perp [AB]$, $[C'B] \perp [AB]$, so ist C' eigentlich, und C', M, C_1 in gerader Linie, also $MC_1 < C'C_1$, also z. B. (s. Fig.) $MBC_1 < C'BC_1$, also spitz und MBA stumpf, gegen die Annahme. Jetzt sei $AB = AC_1 + C_1B$, $AB_1 = AC_1$ und inzident AC, und $BC_1 = BA_1$ und inzident BC; so ist $AMC_1 \cong AMB_1$, $BMC_1 \cong BMA_1$, also $MB_1 = MC_1 = MA_1$; nun sei $BC = BA_1 + A_1C$, $AC = AB_1 + B_1C$, $B_1C_0 = A_1C$ (z. B. $< B_1C$) und inzident B_1C, so ist $MA_1C \cong MB_1C_0$, also $MC = MC_0$; ist jetzt $B_1C = B_1C_0 + C_0C$ und N der Mittelpunkt von CC_0, so ist $MNC \cong MNC_0$, also MNC ein Rechter, also, da auch MB_1C ein Rechter ist, müßte (s. 38) $MB_1 = C'C_1$ sein, während $MB_1 = MC_1 < C'C_1$ gefunden wurde. Also ist $C_0 = C$, d. h. $MCA_1 \cong MCB_1$, also $CA_1 = CB_1$. Ist nun $BC < AC$, also $BA_1 < AB_1$, also $BC_1 < AC_1$, so sei $C_1B_0 = C_1B$ und inzident C_1A, also $C_1MB_0 \cong C_1MB$. Ist nun erstens die Winkelsumme im Dreieck nicht größer als zwei Rechte, so ist die Winkelsumme in C_1MA gleich der von C_1MB_0 und der von MB_0A vermindert um zwei Rechte, also die von C_1MB_0 größer als die von C_1MA; da nun $C_1B_0 < C_1A$, also $C_1MB_0 < C_1MA$ ist, so folgt $C_1B_0M > C_1AM$, also $CBA = 2C_1B_0M$ größer als $BAC = 2C_1AM$, was zu beweisen war. Ist zweitens die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte, so sei $AD = BC_1$ und inzident AC_1, $[DO] \perp [AD]$, $[MO] \perp [MC_1]$, also O eigentlich, $DO < MC_1$, $\angle C_1MA \leqq C_1MO$; denn C_1MA ist < 1 Rechter, sonst ergäbe das Dreieck C_1MA, daß C_1A nicht kleiner, also BA größer wäre als $C'C_1$, gegen die Annahme. Aus $C_1MA \leqq C_1MO$ folgt $DMA \leqq DMO$, also $DP \leqq DO$, wenn $P = ([OD][MA])$ (also eigentlich) ist; ist noch $DQ = C_1M$ und inzident DO, also $DQ > DO$, so folgt $DAQ > DAO$, also $DAQ > DAP$, also, da $DAQ \cong C_1BM$ ist, $C_1BM > C_1AM$, also $ABC > BAC$, was zu beweisen war.

Für den Fall, daß die Dreieckswinkelsumme nicht größer als zwei Rechte ist, kann der Satz einfacher so bewiesen werden: es sei (s. Fig. S. 263) $CA' = CA$ und inzident CB, ebenso $CB' = CB$ und inzident CA; dann ist die Winkelsumme im Viereck $AA'BB'$ gleich $2A'BB' + 2B'AA'$ nicht größer als vier Rechte, also $CAA' \leqq CBB'$; da ferner $CB' = CB < CA$ und $CA' = CA > CB$, also $CBB' < CBA$ und $CAB < CAA'$ ist, so folgt $CAB < CAA' \leqq CBA$, also $CAB < CBA$, was zu beweisen war.

70. Satz: In jedem Dreieck ABC ist die Summe zweier Seiten $AC + BC$ größer als die dritte AB, wenn als dritte Seite AB die kürzere der beiden Strecken AB genommen wird.



Beweis: Es sei (s. Fig.) $CD = CB$ und auf $[CA]$, aber nicht inzident CA; dann ist $ADB = CBD < ABD$, also $AD > AB$, d. h. $AC + BC > AB$.

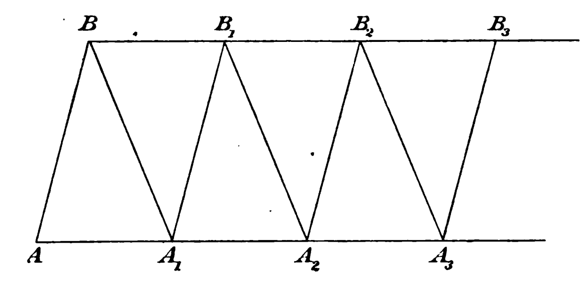
Zusatz: Es gilt stets der Satz $AC + BC \neq AB$, wenn A, B, C nicht in einer Geraden liegen. Denn ist $AC = AD$, D auf AB, so daß $BC = BD$, so folgt: $ACB = ACD + DCB = ADC + BDC = 2$ Rechte, d. h. ACB in einer Geraden.

71. Satz: Gilt ohne Einschränkung der Satz: die gerade Verbindungslinie ist kürzer als jede aus Strecken zusammengesetzte Verbindung zweier Punkte, so sind uneigentliche Punkte vorhanden.

Beweis folgt unmittelbar aus 70.

72. Satz: Gilt der Satz von der geraden Linie als kürzester uneingeschränkt und besteht Meßbarkeit, so ist die Winkelsumme nicht größer als zwei Rechte.

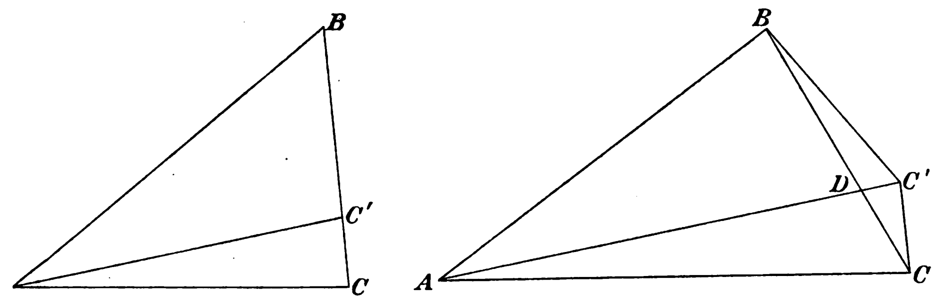
Beweis folgt unmittelbar aus 71 und 67. Legendre bewies den Satz folgendermaßen: Es sei (s. Fig.) in den Dreiecken $ABA_1 \simeq A_1B_1A_2 \simeq A_2B_2A_3 \simeq \cdots$ die Winkelsumme größer als zwei Rechte;



dann ist in den Dreiecken $BA_1B_1 \simeq B_1A_2B_2 \simeq B_2A_3B_3 \simeq \cdots$, der Winkel $BA_1B_1 < ABA_1$, also (s. u.) $BB_1 < AA_1$; existiert also eine ganze Zahl n so, daß $n(AA_1 - BB_1) > 2AB$ ist. so ist:

$$AB + BB_1 + B_1B_2 + \cdots + B_{n-1}B_n + B_nA_n < AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$$
$$\text{d. h. } < AA_n,$$

gegen den Satz von der Geraden als kürzester. Den benutzten Hilfssatz, daß in zwei Dreiecken ABC, ABC' (s. Fig.), die in zwei



Seiten $AB = AB$, $AC = AC'$ übereinstimmen, dem kleineren Winkel $BAC' < BAC$ die kleinere Seite $BC' < BC$ gegenüberliegt, beweist man so:

Ist erstens (s. Fig.)

$$D = ([BC] \, [AC']) = C',$$

so ist ohne weiteres

$$BC' < BC.$$

Ist zweitens (s. Fig.)

$$AC' = AD + DC',$$

so folgt

$$BC' < BD + DC' + AD + DC - AC, \; < BC + AC' - AC, \text{ d.h.} < BC.$$

Ist drittens (s. Fig.)

$$AD = AC' + C'D,$$

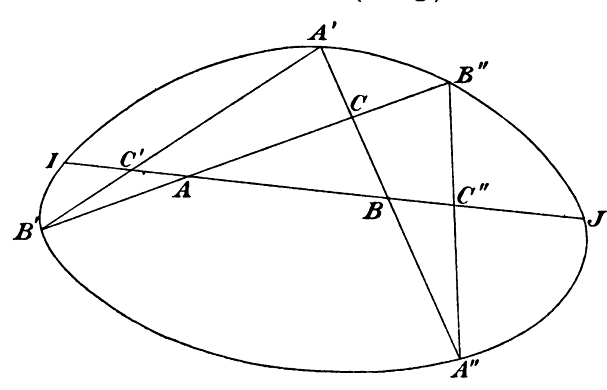
so folgt

$$BC' < BD + DC',$$
$$< BD + AD - AC' <$$
$$BD + AC + CD - AC',$$
$$\text{d. h. } < BC.$$

Wir bewiesen den Satz 70 von der geraden Linie als kürzesten auf Grund der Kongruenzgrundsätze, insbesondere des Satzes 11. Jedoch ist der Satz unabhängig von dem Grundsatz 11, da der Satz besteht:

73. Satz: Es gibt Geometrieen, in denen alle Verknüpfungs-, Anordnungs- und Kongruenzsätze mit Ausnahme von 11 gelten und in denen die gerade Linie die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, und zwar für jeden der drei Fälle, daß auf jeder Geraden kein, ein oder mehr als ein uneigentlicher Punkt liegt, und in letzterem Fall für jeden der drei Fälle, daß die Winkelsumme im Dreieck größer, gleich oder kleiner als zwei Rechte ist.

Beweis: Für den Fall, daß auf jeder Geraden mehr uneigentliche Punkte liegen, ist eine solche Geometrie von Hilbert*) konstruiert worden. Es sei (s. Fig.) in der Euklidischen Ebene eine geschlossene überall konvexe Kurve gegeben, die als Grenzoval genommen werde. Die Punkte im Innern sollen die eigentlichen sein. Als Strecke AB werde der Logarithmus des Wurfes $ABIJ$ definiert, wo IJ die Schnittpunkte von $[AB]$ mit dem Grenzoval sind.



Dann gelten offenbar alle Sätze, die sich auf das Abtragen, Vergleichen und Addieren von Strecken beziehen. Damit auch dieselben Sätze bezüglich der Winkel gelten, braucht man nur (z. B.) festzusetzen, daß Winkel gleich heißen sollen, wenn sie es im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind. Der Grundsatz 11 gilt im allgemeinen nicht, denn gälte er, so gäbe es Affinitäten, also (s. IV 150 S. 221) wäre das Grenzoval eine Kurve zweiter Ordnung, was ausgeschlossen wird. Der Satz von der Geraden als kürzester gilt. Denn nach einem bekannten Satze (dem Satz des Ceva in projektiver Form) ist das Produkt der drei Würfe, welche zwei Transversalen $[A'B'C']$, $[A''B''C'']$ eines Dreiecks ABC auf dessen Seiten bestimmen, der Einheit gleich, also

$$\frac{C''A}{C''B}:\frac{C'A}{C'B}=\left(\frac{B''A}{B''C}:\frac{B'A}{B'C}\right)\cdot\left(\frac{A'B}{A'C}:\frac{A''B}{A''C}\right),$$

woraus vermittelst

$$\frac{C''A}{C''B}<\frac{JA}{JB},\quad \frac{C'A}{C'B}>\frac{IA}{IB}$$

---

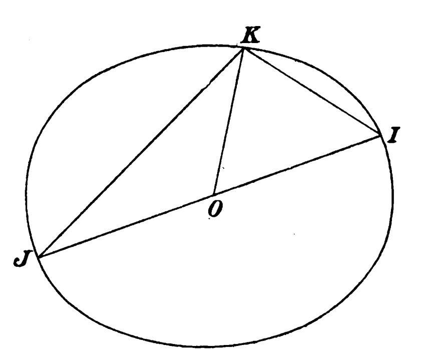
*) Math. Ann. 46 (1895) p. 91; Grundlagen der Geometrie 2. Aufl. p. 83.

durch Logarithmieren

$$AB < AC + BC$$

folgt.

Für den Euklidischen Fall, daß auf jeder Geraden genau ein uneigentlicher Punkt liegt, ist eine Geometrie der verlangten Art die von Minkowski*) seiner Geometrie der Zahlen zugrunde gelegte. In der Euklidischen Ebene werde eine geschlossene, überall konvexe Kurve mit Mittelpunkt O als „Eichoval" genommen. Zwei Strecken heißen gleich, wenn sie durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen; ferner heißen zwei „Radien" OI, OJ des Eichovals einander gleich; schließlich heißen zwei Strecken OA auf OI, und OB auf OJ einander gleich, wenn $[AB] \parallel [IJ]$ ist. Winkel heißen gleich, wenn sie es im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind. Offenbar gelten alle Kongruenzgrundsätze mit Ausnahme des Satzes 11. Denn gälte dieser Satz, so seien (s. Fig.) K, I, J Punkte des Eichovals, I, O, J in einer Geraden; dann folgt $KOI \cong IOK$, $KOJ \cong JOK$, also $OIK = OKI$, $OJK = OKJ$, also $IKJ = JIK + IJK$, also, da hier die Dreieckswinkelsumme zwei Rechte beträgt, $IKJ = 1$ Rechter. Nach dem Satz des Thales (65) wäre also das Eichoval ein Kreis, was ausgeschlossen werden konnte. Dagegen gilt der Satz von der Geraden als kürzester. Um das zu beweisen, definiere man als Eichoval mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AC die Gesamtheit des Punkte P, für welche $AP = AC$ ist. Zwei Eichovale, eins um A und durch P, ein andres um B und durch Q, haben einen äußeren und einen inneren Ähnlichkeitspunkt. Sind nämlich $AP \parallel BQ$ und $AP\ BQ'$ parallele Radien der beiden Eichovale, so ist z. B. $([AB][PQ])$ der äußere, und $([AB][PQ']) = M$ zwischen A und B der innere Ähnlichkeitspunkt. Haben die beiden Ovale einen Schnittpunkt C und ist CD die Sehne des zweiten Ovals, welche durch M geht, so liegt M auch zwischen C und D, also im Innern des zweiten, ebenso des ersten Ovals; also ist



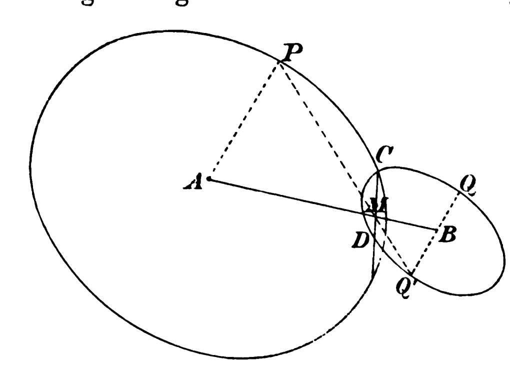
$$AB = AM + MB < AC + CB,$$

was zu beweisen war.

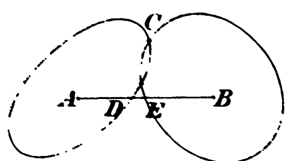
*) Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896.

Für den dritten Fall, in welchem keine uneigentlichen Punkte existieren, konstruiert man eine Geometrie von der verlangten Beschaffenheit wie folgt. In einer Euklidischen Ebene, deren Punkte alle eigentlich heißen mögen, werde Winkelgleichheit im gewöhnlichen Sinne verstanden, Strecken sollen dagegen gleich heißen, wenn sie von einem bestimmten Punkte O außerhalb der Ebene aus unter gleichen Winkeln gesehen werden. Dann gelten offenbar alle Kongruenzgrundsätze mit Ausnahme von 11, da kongruente Dreiecke einer Kugel um O von O aus im allgemeinen nicht in ähnliche Dreiecke einer Ebene projiziert werden. Der Satz von der Geraden als kürzester gilt, mit der in 58 bemerkten Einschränkung, da er auf der Kugeloberfläche gilt.

74. In bezug auf das Abtragen von Strecken ist eine Geometrie vollkommen durch die Beschaffenheit der zu jedem Punkte gehörigen Eichovale charakterisiert. Jedes Eichoval ist, wenn man an der eindeutigen Möglichkeit des Streckenabtragens festhält, so beschaffen, daß es jede Gerade seines Mittelpunktes in genau zwei Punkten schneidet. Zwei Radien AB, AB' eines Eichovals heißen gleich; zwei Strecken AB, CD heißen gleich, wenn sie bzw. AB', CD' gleich und AB', CD' gleiche Strecken einer Geraden $[AC]$ sind, d. h. wenn (z. B.) AC, $B'D'$ denselben Mittelpunkt haben. Die Existenz eines Mittelpunktes ergibt sich aus Stetigkeitsbetrachtungen.



Damit der Satz von der Geraden als kürzester gilt, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß erstens die Zentrale zweier sich schneidenden Eichovale durch das innerhalb beider liegende Ebenenstück hindurchgeht, und daß zweitens beiderseits derselben nur je ein Schnittpunkt liegt. Wäre die erste Bedingung nicht erfüllt, so wäre (s. die erste Fig.) z. B.



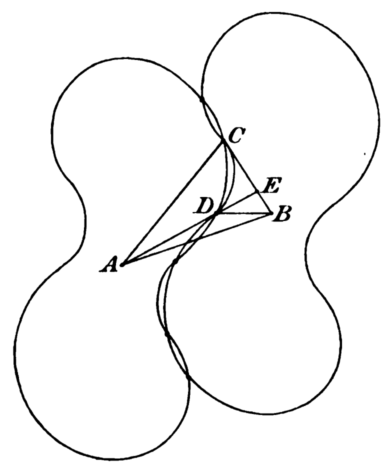
$$AC + CB = AD + EB = AB - DE < AB.$$

Wäre die zweite Bedingung nicht erfüllt, so wäre z. B. (s. die zweite Fig.) E zwischen B, C und D zwischen A, E, also:

$$AC - CB = AD + DB < AD + DE + EB,$$
$$< AE + EB < AC + CE + EB, \quad < AC + CB.$$

Sind beide Bedingungen erfüllt, so gilt offenbar der Satz von der Geraden als kürzester.

Im Euklidischen Fall, wo auf jeder Geraden genau ein uneigentlicher Punkt liegt und die Eichovale einen Mittelpunkt haben, alle einander ähnlich und ähnlichliegend werden, ist die Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn dieselben überall konvex sind; denn andernfalls existieren (s. Fig.) Paare von Eichovalen mit mehr als zwei Schnittpunkten.



Im Falle, daß auf jeder Geraden mehr als ein uneigentlicher Punkt liegt, ist die Bedingung erfüllt, wenn das Grenzoval überall konvex ist, wie der oben (71) gegebene Beweis erkennen läßt. Demnach ist in diesem Falle der Satz von der Geraden als kürzester dem Anordnungsgrundsatz der uneigentlichen Punkte gleichbedeutend, daß zwei eigentliche und zwei uneigentliche Punkte einer Geraden sich nicht trennen. Verlangt man nur, daß es keine kürzere Verbindungslinie zweier Punkte gibt als die Gerade, so ergibt sich ebenso, daß das Grenzoval nur nirgend konkav sein darf, wohl aber geradlinige Grenzstücke vorhanden sein können.

Alle Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten sind, hat Hamel*) analytisch charakterisiert.

Polarentheorie.

75. Satz: In einer Ebene gehen alle Lote einer (eigentlichen) Geraden durch einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt, ihren Lotschnittpunkt.

Beweis s. den ersten Teil des Beweises von 38, der auch gilt, wenn der Lotschnittpunkt P uneigentlich ist.

76. Satz: In einer Ebene liegen die Lotschnittpunkte aller Geraden eines (eigentlichen) Punktes auf einer (eigentlichen oder uneigentlichen) Geraden, seiner Fußpunktgeraden.

Beweis: Es seien (s. die erste Fig. S. 270) $[OA]$, $[OA_1]$, $[OA_2]$ drei Geraden eines Punktes O; man mache $OA = OA_1 = OA_2$,

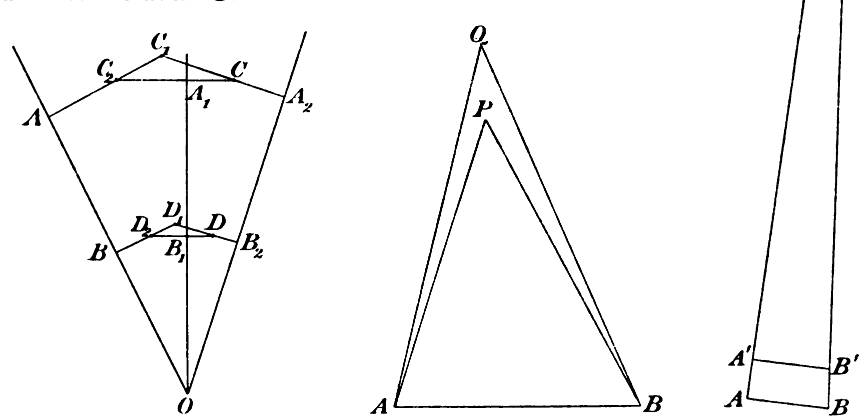
*) Inaug.-Diss. Göttingen 1901 und Math. Ann. 57 (1903) p. 231.

$\angle\, C_2AO = C_2A_1O = CA_1O = CA_2O = C_1AO = C_1A_2O =$ einem Rechten, also

$$\angle\, COA_1 = COA_2 = \tfrac{1}{2}A_1OA_2, \quad \angle\, C_1OA_2 = C_1OA = \tfrac{1}{2}AOA_2,$$
$$\angle\, C_2OA_1 = C_2OA = \tfrac{1}{2}AOA_1.$$

Macht man ebenso $OB = OB_1 = OB_2$, inzident resp. OA, OA_1, OA_2, und bestimmt ebenso D, D_1, D_2 so wird $\angle DOB_1 = COA_1$, $\angle D_1OB_2 = C_1OA_2$, $\angle D_2OB = C_2OA$, d. h. $[CD]$, $[C_1D_1]$, $[C_2D_2]$ gehen durch O, also liegen die drei Lotschnittpunkte $([AC_1][BD_1])$, $([A_1C_2][B_1D_2])$, $([A_2C][B_2D])$ der drei Geraden $[AB]$, $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$ von O auf einer Geraden.

77. Satz: Falls uneigentliche Punkte nicht existieren, gehört in einer Ebene zu jeder Geraden genau ein Lotschnittpunkt, zu jedem Lotschnittpunkt genau eine Gerade; und liegt der Lotschnittpunkt G einer Geraden $\mathfrak{G}$ auf einer Geraden $\mathfrak{H}$, so liegt der Lotschnittpunkt der Geraden $\mathfrak{H}$ auf der Geraden $\mathfrak{G}$.



Beweis: Gehörten (s. die zweite Fig.) zu einer Geraden $[AB]$ zwei Lotschnittpunkte P und Q, so wären $\angle PAB$ und QAB Rechte, also (s. 20) $[PA] = [QA]$, ebenso $[PB] = [QB]$, also

$$P = ([PA][PB]) = ([QA][QB]) = Q.$$

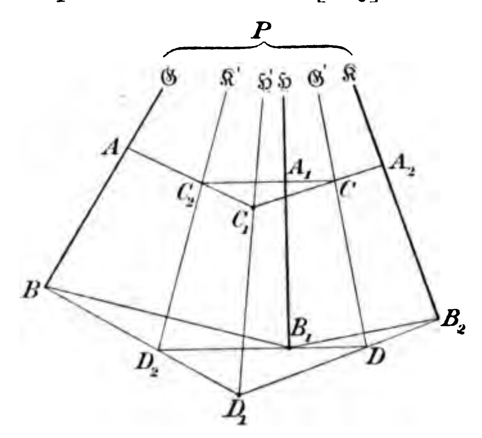
Gehörten (s. die dritte Fig.) zu einem Lotschnittpunkt P zwei Gerade $[AB]$, $[A'B']$, so wäre $ABA'B'$ ein Rechteck, also in ABA' die Winkelsumme zwei Rechte, gegen 59.

Es liege (s. die vierte Fig.) der Lotschnittpunkt G

von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$. Es sei $[GH] \perp \mathfrak{H}$, $HH_1 = GG_1$, also $GHH_1 \cong HGG_1$, so folgt, daß $\angle GG_1H = HH_1G =$ einem Rechten, d. h. H Lotschnittpunkt von $\mathfrak{H}$ ist.

78. Satz: Falls auf jeder Geraden mehr als ein uneigentlicher Punkt existiert, definiere man in einer Ebene als Fußpunktgerade eines uneigentlichen Punktes ($\mathfrak{G}\mathfrak{H}$) die Verbindungsgerade der Lotschnittpunkte zweier eigentlichen Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ des Punktes, und als Lotschnittpunkt einer uneigentlichen Geraden $[PQ]$ den Schnittpunkt der Fußpunktgeraden zweier uneigentlichen Punkte P, Q derselben. Alsdann hat allgemein jede Gerade genau einen Lotschnittpunkt, jeder Punkt genau eine Fußpunktgerade, und liegt ein Punkt auf einer Geraden, so geht seine Fußpunktgerade durch den Lotschnittpunkt der Geraden.

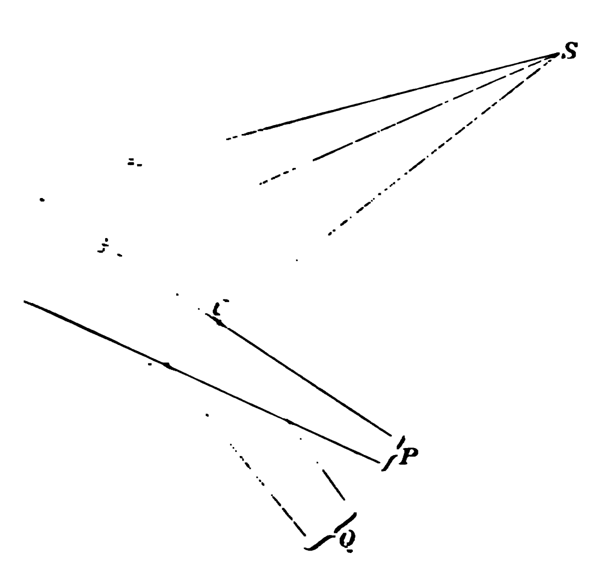
Beweis: Daß jede eigentliche Gerade genau einen Lotschnittpunkt hat, wird wie in 76 bewiesen. Gäbe es (s. Fig.) zu einem eigentlichen Punkte P zwei Fußpunktgeraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ und schneidet $\mathfrak{G}$ von P die Geraden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ in G, G', so müßte, nach Definition, G sowohl wie G' Lotschnittpunkt einer Geraden $[PQ] \perp \mathfrak{G}$ sein, gegen den eben bewiesenen Satz. Liegt ein eigentlicher Punkt auf einer eigentlichen Geraden, so geht seine Fußpunktgerade durch den Lotschnittpunkt der Geraden, wie unmittelbar aus den Definitionen folgt.



Um zu zeigen, daß zu einem uneigentlichen Punkte P genau eine Fußpunktgerade gehört, muß man beweisen, daß die Lotschnittpunkte aller eigentlichen Geraden von P auf einer Geraden liegen. Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ drei Gerade eines uneigentlichen Punktes P (s. Fig.), $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{K}'$ ihre drei Mittelgeraden, $[C_1AC_2]$ und $[D_1BD_2] \perp \mathfrak{G}$, $[C_2A_1C]$ und $[D_2B_1D] \perp \mathfrak{H}$,

$\angle C_2AO = C$ [illegible] B auf $\mathfrak{H}$, A_2. B_2 auf
Rechten, also [illegible] $[CD]$, $[C_2D_2]$ die Mittel-
$\angle COA$, [illegible] punkt geht also 50 Zu-
[illegible] also $\mathfrak{H}'$. Ist M der Mittel-
[illegible] MA_2 [illegible] $\mathfrak{H}'$,
Macht man [illegible] auf $\mathfrak{H}'$, ebenso ist D auf
und best [illegible] zu vollenden.
$= C_1 O$ [illegible] ein uneigentlicher Punkt
gehen [illegible] $\mathfrak{L}$ so geht eine Fußpunktgerade
$([AC_1$ [illegible]
Gerad [illegible] Fußpunktgeraden dreier in einer
rade [illegible] Punkte durch einen Punkt gehen

[illegible]



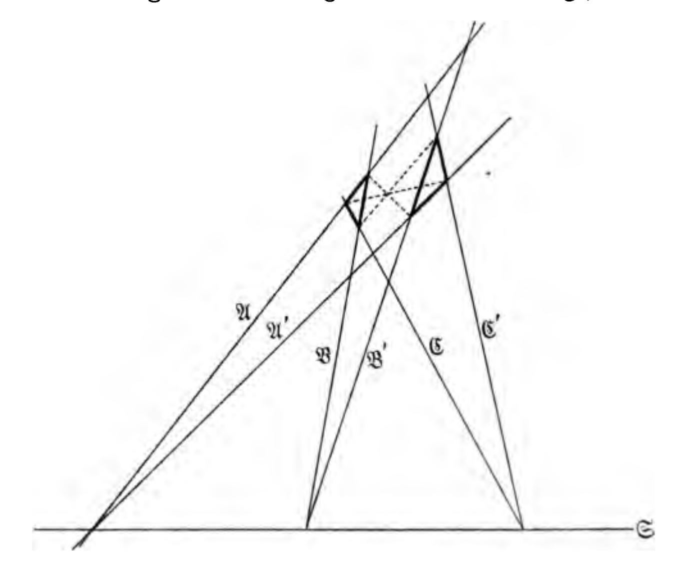
[illegible] einer Geraden eines eigentlichen Punktes [illegible] bestimme auf zwei weiteren Geraden von [illegible] so, daß

[illegible] $= ([CA] [C'A'])$, $R = ([AB] [A'B'])$

[illegible] eigentlich wählen. Bezeichnet man ihre [illegible] mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ und mit $\mathfrak{S}$ die von S, so [illegible] dem oben Bewiesenen die Punkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')$ auf [illegible]; also ergibt der Desarguessche Satz aus den Drei-

ecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, daß die drei Geraden $[(\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')]$, $[(\mathfrak{C}\mathfrak{A})(\mathfrak{C}'\mathfrak{A}')]$, $[(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')]$ durch einen Punkt gehen. Nun liegen (z. B.) B, C auf der eigentlichen Geraden $[BC]$, also gehen ihre Fußpunktgeraden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ durch den Lotschnittpunkt von $[BC]$ usw.; also ist nach Definition $[(\mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}')]$ die Fußpunktgerade von P, ebenso $[(\mathfrak{C}\mathfrak{A})(\mathfrak{C}'\mathfrak{A}')]$ die Fußpunktgerade von Q und $[(\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')]$ die von R. Damit ist der Beweis vollendet und zugleich gezeigt, wenn ein uneigentlicher Punkt P auf einer uneigentlichen Geraden $[QR]$ liegt, geht seine Fußpunktgerade durch den Lotschnittpunkt von $[QR]$.

79. Definition: Schließt man den Euklidischen Fall aus, daß auf jeder Geraden genau ein uneigentlicher Punkt liegt, und definiert



im Raume als Polare einer Geraden $\mathfrak{G}$ die Gerade, auf der alle Lotschnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ in den verschiedenen Ebenen von $\mathfrak{G}$ liegen, als Pol einer Ebene den Schnittpunkt aller Polaren ihrer Geraden, als Polarebene eines Punktes die Ebene aller Polaren seiner Geraden, so besteht der Satz:

80. Satz: Jede Gerade hat genau eine Polargerade; jede Ebene hat genau einen Pol, jeder Punkt hat genau eine Polarebene; liegt ein Punkt in einer Ebene, so geht seine Polarebene durch den Pol der Ebene.

Beweis: Ist $[OP] \perp \{PQR\}$, S der Lotschnittpunkt von $[PQ]$ in $\{PQR\}$, $PQ = PO$, also $SPQ \simeq SPO$, so ist also S auch ein Lotschnittpunkt von $[OP]$. Die Lotschnittpunkte aller Geraden $[PQ]$

von $\{PQR\}$, also von $[PO]$ in allen Ebenen von $[PO]$ liegen auf der Fußpunktgeraden von P in $\{PQR\}$. Demnach hat jede eigentliche Gerade eine Polare. Je zwei Lote einer eigentlichen Ebene liegen in einer Ebene, gehen durch einen Punkt; also gehen alle durch einen Punkt d. h. jede eigentliche Ebene hat genau einen Pol. Ist S der Pol von $\{PQR\}$, so ist S ein Lotschnittpunkt von $[PQ]$ und von $[PR]$, d. h. Schnittpunkt der Polaren von $[PQ]$ und $[PR]$. Irgend drei Gerade $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ eines Punktes O, die nicht in einer Ebene liegen, haben Polaren, die zu je zweien in einer Ebene liegen; sie gehen nicht alle drei durch einen Punkt S, denn der wäre zugleich Pol von $\{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\}$, $\{\mathfrak{P}\mathfrak{R}\}$, $\{\mathfrak{Q}\mathfrak{R}\}$, was nach vorhergehendem unmöglich; demnach liegen die drei Polaren, also alle Polaren der Geraden von O in einer Ebene, seiner Polarebene. Demnach hat jeder Punkt eine Polarebene, und liegt ein Punkt in einer eigentlichen Ebene, so geht seine Polarebene durch den Pol der Ebene.

Auf jeder eigentlichen Ebene einer uneigentlichen Geraden $\mathfrak{P} = [PQ]$ liegt jeder Punkt von $\mathfrak{P}$; also liegen deren Pole in den Polarebenen aller Punkte von $\mathfrak{P}$, also in der Schnittgeraden der Polarebenen von P und Q. Also hat jede uneigentliche Gerade eine Polare. Je zwei Gerade $[PQ]$, $[PR]$ einer uneigentlichen Ebene $\{PQR\}$ haben Polaren, die in der Polarebene von P liegen, sich also schneiden; je drei Gerade $[PQ]$, $[PR]$, $[QR]$, die nicht durch einen Punkt gehen, haben also Polaren, die sich zu je zweien schneiden; sie können nicht in einer Ebene liegen, denn diese wäre Polarebene von P, von Q und von R, gegen das oben Bewiesene. Also gehen sie durch einen Punkt, den Pol der uneigentlichen Ebene $\{PQR\}$. Also hat jede uneigentliche Ebene einen Pol, und liegt ein Punkt in einer uneigentlichen Ebene, so geht seine Polarebene durch deren Pol.

Koordinaten, nicht-Euklidisch.*)

81. Es werden jetzt, wie in II 150 S. 135, Koordinaten eingeführt, aber zu dem Zwecke die Grundpunkte A_0, A_1, A_2, A_3 in folgender Weise gewählt. A_0 sei ein beliebiger eigentlicher Punkt, A_1 ein beliebiger von A_0 verschiedener Punkt in der Polarebene von A_0, A_2 ein beliebiger von A_0 und A_1 verschiedener Punkt in der Polargeraden von $[A_0A_1]$, also in den Polarebenen von A_0 und von A_1, A_3 sei der Pol der Ebene $\{A_0A_1A_2\}$. Demnach ist noch $\{A_0A_2A_3\}$ die Polarebene

*) Anders als im folgenden begründet Schur, Math. Ann. 55 (1902) p. 265 die nicht-Euklidische Koordinatengeometrie.

von A_1, $\{A_0 A_1 A_3\}$ die von A_2. Ist jetzt $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ irgend ein Punkt, so müssen die Koordinaten seiner Polarebene $\{\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3\}$ durch eine Transformation:

$$\xi_i = \sum a_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

mit nicht verschwindender Determinante

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

ausdrückbar sein. Demnach ist

$$\sum_{i,k} a_{ik} y_i x_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

bei gegebenen x_0, x_1, x_2, x_3 und variabeln y_0, y_1, y_2, y_3 die Gleichung der Polarebene des Punktes (x_0, x_1, x_2, x_3). In der Polarebene von $(1, 0, 0, 0)$ liegt jeder der drei Punkte $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, also muß

$$a_{01} = 0 \quad a_{02} = 0 \quad a_{03} = 0$$

sein; ebenso folgt

$$\begin{array}{lll} a_{10} = 0 & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{20} = 0 & a_{21} = 0 & a_{23} = 0 \\ a_{30} = 0 & a_{31} = 0 & a_{32} = 0. \end{array}$$

Die Gleichung hat also die einfachere Form:

$$a_0 x_0 y_0 + a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + a_3 x_3 y_3 = 0$$

mit

$$a_0 a_1 a_2 a_3 \neq 0.$$

Durch die Koordinatentransformation:

$$\begin{array}{l} x_0 \sqrt{|a_0|} \,\|\, x_0 \\ x_1 \sqrt{|a_1|} \,\|\, x_1 \\ x_2 \sqrt{|a_2|} \,\|\, x_2 \\ x_3 \sqrt{|a_3|} \,\|\, x_3, \end{array}$$

worin $|a_0|$, $|a_1|$, $|a_2|$, $|a_3|$ die positiven Werte von a_0, a_1, a_2, a_3 bezeichnen, geht die Gleichung im wesentlichen in eine der drei Formen über:

$$\begin{array}{r} x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \\ -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \\ -x_0 y_0 + x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0. \end{array}$$

Im zweiten und dritten Fall gibt es Punkte, die in ihren Polarebenen liegen, da die Gleichungen:

$$-x_0^2 + x_1^2 \pm x_2^2 + x_3^2 = 0$$

durch reelle Werte von x_0, x_1, x_2, x_3 erfüllt werden können. Da dies bei eigentlichen Elementen niemals stattfindet, müssen in diesen beiden Fällen uneigentliche Elemente existieren.

Aber der Fall der Gleichung:

$$-x_0y_0 + x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

ist auszuschließen, da in ihm der Satz nicht mehr allgemein gilt, daß $AC + CB \neq AB$ ist, wenn A, B, C nicht in einer Geraden liegen (s. 88).

82. Definition: Ein derartiges Entsprechen zwischen den eigentlichen Punkten des Raumes, daß jedem Punkt genau ein Punkt und jeder Strecke eine gleiche Strecke entspricht, heißt eine Kongruenz.

83. Satz: Es gibt Kongruenzen.

Beweis: Man setze entsprechend dem eigentlichen Punkte A einen beliebigen eigentlichen Punkt A', dann einem eigentlichen Punkte B einen Punkt B', so daß $A'B' = AB$, also B' eigentlich ist; dann jedem eigentlichen Punkte $C_1, \ldots$ von $[AB]$ einen Punkt $C_1', \ldots$ von $[A'B']$, so daß $AC_1 = AC_1'$, usw., was nach 33 möglich ist; alsdann einem eigentlichen Punkte C, für den $[CC_1] \perp [AB]$ ist, einen Punkt C', für den $[C'C_1'] \perp [A'B']$ und $C'C_1' = CC_1$ ist; alsdann jedem eigentlichen Punkte $D_1, \ldots$ von $\{ABC\}$ einen Punkt D_1' von $\{A'B'C'\}$, so daß $AD_1 = A'D_1'$, usw., was nach 34 möglich ist; alsdann jedem eigentlichen Punkte $D, \ldots$ für den $[DD_1] \perp \{ABC\}$ einen Punkt D', für den $[D'D_1'] \perp \{A'B'C'\}$ und $D'D_1' = DD_1$ ist, und so, daß z. B. $ABCDE \cong A'B'C'D'E'$ ist, was nach 35 möglich ist. Dann entsprechen allen eigentlichen Punkten wieder eigentliche Punkte und alle entsprechenden Strecken sind gleich.

84. Satz: In jeder Kongruenz entsprechen drei eigentlichen Punkten einer Geraden drei eigentliche Punkte einer Geraden.

Beweis: Sind A, B, C drei Punkte in einer Geraden und A', B', C' die ihnen entsprechenden, also $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, so folgt aus (z. B.)

$$AB + BC = AC,$$

daß auch

$$A'B' + B'C' = A'C'$$

ist; lägen A', B', C' nicht in einer Geraden, so wäre stets:

$$A'B' + B'C' \neq A'C'$$

(s. 70 Zusatz), also liegen A', B', C' in einer Geraden.

85. Satz: In jeder Kongruenz sind entsprechende Winkel gleich.

Beweis: Entsprechen A', B', C' den Punkten A, B, C, so ist $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, also (22) Winkel $ABC = A'B'C'$.

86. Satz: Ordnet man in einer Kongruenz einem uneigentlichen Punkte $([AB][CD])$ stets den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden $([A'B'][C'D'])$ zu, so entspricht auch jedem uneigentlichen Punkt ein uneigentlicher Punkt und drei Punkten einer Geraden drei Punkte einer Geraden.

Beweis: Aus $A'B'C'D' \cong ABCD$ folgt wie in 37, daß mit $([AB][CD])$ zugleich $([A'B'][C'D'])$ uneigentlich ist. Daß drei Punkten einer Geraden drei Punkte einer Geraden entsprechen, folgt durch kongruente Übertragung einer zugehörigen Desarguesschen Figur.

87. Satz: Jede Kongruenz ist eine Projektivität, dem Pol einer Ebene entspricht der Pol der entsprechenden Ebene; und den Punkten, die in ihrer Polarebene liegen, entsprechen Punkte, die in ihren Polarebenen liegen.

Beweis: Daß jedem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt genau ein Punkt entspricht und drei Punkten einer Geraden wieder drei Punkte einer Geraden entsprechen, folgt aus 74, 76. Ferner entspricht jedem rechten Winkel nach 75 ein rechter Winkel. Da die Beziehung zwischen Pol und Polarebene (teils direkt, teils indirekt) auf den rechten Winkel gegründet war, so entspricht auch Pol und Polarebene immer Pol und Polarebene. Da schließlich in jeder Projektivität koinzidierenden Elementen koinzidierende Elemente entsprechen, so entspricht auch jedem Punkt, der in seiner Polarebene liegt, wieder ein Punkt, der in seiner Polarebene liegt; d. h. jeder Punkt, der der Gleichung

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad x_0^2 + x_1^2 \pm x_1^2 + x_3^2 = 0$$

genügt, entspricht einem Punkt derselben Beschaffenheit.

88. Satz: Genügen die Punkte, die in ihren Polarebenen liegen, der Gleichung

$$-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

so gilt nicht immer der Satz, daß $AC + CB \neq AB$ ist, wenn A, B, C in keiner Geraden liegen.

Beweis: Durch einen eigentlichen Punkt $A(a_0 a_1 a_2 a_3)$ und die Gerade $\mathfrak{G}$:

$$x_0 - x_1 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

lege man die (eigentliche) Ebene E:

$$(a_2 - a_3)(x_0 - x_1) = (a_0 - a_1)(x_2 - x_3);$$

die Koeffizienten $a_2 - a_3$, $a_0 - a_1$ verschwinden jedenfalls nicht beide, da sonst

$$-a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 = 0,$$

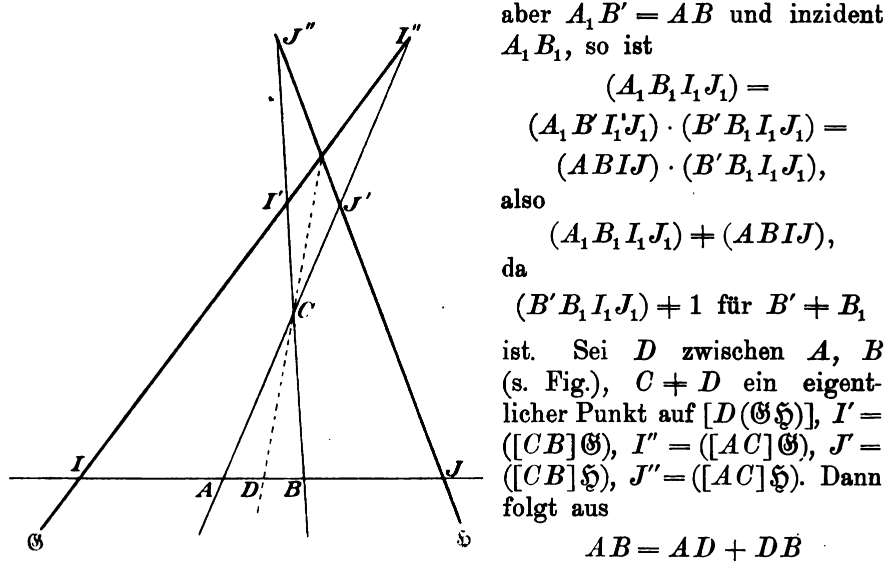
also A nicht eigentlich wäre. In der Ebene E liegt außer $\mathfrak{G}$ auch die Gerade $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$:

$$(a_2 - a_3)(x_0 - x_1) = (a_0 - a_1)(x_2 - x_3)$$
$$(a_0 - a_1)(x_0 + x_1) = -(a_2 - a_3)(x_2 + x_3)$$

und jeder Punkt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ genügt der Gleichung

$$-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Seien jetzt B, A_1, B_1 weitere eigentliche Punkte von $E = \{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$, und Strecke $AB = A_1B_1$. Ist $I = ([AB]\mathfrak{G})$, $J = ([AB]\mathfrak{H})$, $I_1 = ([A_1B_1]\mathfrak{G})$, $J_1 = ([A_1B_1]\mathfrak{H})$, so existiert eine Kongruenz, in welcher A, B den A_1, B_1 entsprechen; also eine Projektivität, in welcher A, B, I, J den A_1, B_1, I_1, J_1 (mit Erhaltung der Ordnung) entsprechen. Demnach sind die Würfe $ABIJ$, $A_1B_1I_1J_1$ gleich. Sei jetzt $AB \neq A_1B_1$, aber $A_1B' = AB$ und inzident A_1B_1, so ist



$$(A_1B_1I_1J_1) = (A_1B'I_1J_1) \cdot (B'B_1I_1J_1) = (ABIJ) \cdot (B'B_1I_1J_1),$$

also

$$(A_1B_1I_1J_1) \neq (ABIJ),$$

da

$$(B'B_1I_1J_1) \neq 1 \text{ für } B' \neq B_1$$

ist. Sei D zwischen A, B (s. Fig.), $C \neq D$ ein eigentlicher Punkt auf $[D(\mathfrak{G}\mathfrak{H})]$, $I' = ([CB]\mathfrak{G})$, $I'' = ([AC]\mathfrak{G})$, $J' = ([CB]\mathfrak{H})$, $J'' = ([AC]\mathfrak{H})$. Dann folgt aus

$$AB = AD + DB$$

und aus

$$ADIJ = ACI''J', \quad DBIJ = CBI'J''$$

zunächst

$$AD = AC, \quad DB = CB,$$

also schließlich

$$AB = AC + CB,$$

statt

$$AB \neq AC + CB,$$

wie es sein müßte.

Übrigens ist hier auch nicht der Satz 78 erfüllt, da in E jedem Punkte von $\mathfrak{G}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ als Polare entspricht; also könnte auch aus diesem Grunde die Gleichung

$$-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ausgeschlossen werden.

89. Die Gleichung der Polarebene eines Punktes (x_0, x_1, x_2, x_3) heißt also entweder

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

oder

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0.$$

Wir fassen diese beiden Fälle zusammen in

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - j^2 x_3 y_3 = 0,$$

wo entweder $j^2 = -1$ oder $= +1$ ist.

Eine Kongruenz ist eine Projektivität, in welcher Pol und Polarebene wieder Pol und Polarebene entsprechen; also eine simultane Transformation

$$x_h \quad \sum_k c_{hk} x_k, \qquad y_h \quad \sum_k c_{hk} y_k, \qquad (k, k = 0, 1, 2, 3)$$

bei welcher die bilineare Form

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 - j^2 x_3 y_3$$

in sich übergeht, also eine automorphe Transformation:

$$x_h \quad \sum_k c_{hk} x_k \qquad (h, k = 0, 1, 2, 3)$$

der quadratischen Form

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - j^2 x_3^2$$

oder der quadratischen Gleichung:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - j^2 x_3^2 = 0.$$

90. Es werde

$$\frac{x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2}{x_3} = x, \qquad \frac{x_0 - i_1 x_1 - i_2 x_2}{x_3} = x'$$

gesetzt, wo i_1, i_2 Zahlen sind, die den Gleichungen

$$i_1^2 + 1 = i_2^2 + 1 = i_1 i_2 + i_2 i_1 = 0$$

genügen.

Die Transformation

$$\begin{array}{l} x_0 \parallel -x_0 \\ x_1 \parallel -x_1 \\ x_2 \parallel -x_2 \\ x_3 \parallel x_3 \end{array}$$

ist offenbar eine Kongruenz. In derselben entspricht jeder Punkt der Ebene $x_3 = 0$ sich selbst. Ist also PQ das von einem beliebigen Punkte auf diese Ebene gefällte Lot, so entspricht Q sich selbst, also P einem Punkte P', so daß $P'Q = PQ$ und senkrecht zur Ebene $x_3 = 0$ ist. Diese Kongruenz ist also eine Spiegelung an dieser Ebene. Sie kann auch durch

$$x \parallel -x$$

repräsentiert werden.

91. Eine Kongruenz, in welcher der Punkt $A_3(x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ sich selbst entspricht, werde bestimmt durch Angabe zweier sich in ihr entsprechenden Halbgeradenpaare $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ von A_3. Die Ebenen, in bezug auf welche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, resp. $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ Spiegelbilder voneinander sind, mögen sich in einer Geraden $\mathfrak{A}$ schneiden. Ordnet man jeder Halbebene E von $\mathfrak{A}$ eine Halbebene E' von $\mathfrak{A}$ so zu, daß der Winkel $\mathsf{E}\mathsf{E}'$ dem Winkel der Ebenen $\{\mathfrak{G}\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{G}'\mathfrak{A}\}$ gleich ist, und jeder Halbgeraden $\mathfrak{K}$ von E eine Halbgerade $\mathfrak{K}'$ von E, so daß der Winkel $\mathfrak{K}\mathfrak{A}$ dem Winkel $\mathfrak{K}'\mathfrak{A}$ gleich ist, und jedem Punkte P von $\mathfrak{K}$ einen Punkt P' von $\mathfrak{K}'$, so daß $A_3P = A_3P'$ ist, so wird dadurch eine Kongruenz bestimmt, in welcher $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ resp. $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ entsprechen. Aus dieser Kongruenz erhält man eine zweite solche durch Spiegelung an der Ebene $\{\mathfrak{G}'\mathfrak{H}'\}$. Von dieser Spiegelung abgesehen ist diese Kongruenz also eine Drehung um die Gerade $\mathfrak{A}$ als Achse. Sind

$$\begin{array}{r} a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \\ a_1 x_0 - a_{12} x_2 = 0 \\ a_2 x_0 + a_{12} x_1 = 0 \end{array}$$

die Gleichungen dieser Geraden, so wird j e d e Drehung um $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation dieser Form:

$$\begin{array}{r} a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 = a_0 x_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 \\ -a_1 y_0 + a_0 y_1 + a_{12} y_2 = a_1 x_0 + a_0 x_1 - a_{12} x_2 \\ -a_2 y_0 - a_{12} y_1 + a_0 y_2 = -a_2 y_0 - a_{12} y_1 + a_0 y_2 \end{array}$$

repräsentiert. Denn bei einer solchen entsprechen die Punkte der Achse $\mathfrak{A}$ sich selbst und der Koeffizient a_0 kann so bestimmt werden, daß einer gegebenen Halbebene von $\mathfrak{A}$ eine gegebene Halbebene von $\mathfrak{A}$ entspricht. Die drei Transformationsformeln können in die eine

$$ax = ya'$$

zusammengefaßt werden, wenn

$$a = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_1 i_2 a_{12}$$
$$a' = a_0 - i_1 a_1 - i_2 a_2 + i_1 i_2 a_{12}$$

gesetzt wird. Demnach ist durch

$$y = ax(a')^{-1}$$

jede Drehung um A_3, durch

$$y = - ax(a')^{-1}$$

jede mit einer Spiegelung zusammengesetzte Drehung um A_3 ausgedrückt. In der Tat geht dadurch die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = j^2 x_3^2$$

oder

$$xx' = j^2$$

in sich über; denn

$$y = \pm ax(a')^{-1}, \quad y' = \pm a'x'a^{-1}$$

gibt

$$yy' = ax(a')^{-1}a'x'a^{-1} = axx'a^{-1} = aj^2a^{-1} = j^2.$$

Die dreigliedrigen Zahlen

$$x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2$$

heißen Vektoren, die viergliedrigen

$$a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_1 i_2 a_{12}$$

Quaternionen.

92. Es ist ferner auch

$$y = \frac{x + u}{1 + j^2 u' x},$$

wo

$$u = \frac{u_0 + i_1 u_1 + i_2 u_2}{u_3}$$

ist, eine automorphe Transformation von

$$xx' = j^2.$$

Denn es wird

$$y = \frac{x + u}{1 + j^2 u' x} = \frac{\frac{j^2}{x'} + u}{1 + j^2 \frac{u' j^2}{x'}} = j^2 \frac{1 + j^2 u x'}{x' + u'} = \frac{j^2}{y'}.$$

In dieser Kongruenz entspricht dem Punkte ($x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$) der beliebige Punkt (u_0, u_1, u_2, u_3); dieselbe kann als Schiebung bezeichnet werden.

93. Aus einer Schiebung, einer Drehung und eventuell einer Spiegelung läßt sich offenbar jede Kongruenz zusammensetzen. Demnach sind in

$$y = a \frac{\pm x + u}{1 \pm j^2 u' x} a'^{-1}$$

alle automorphen Transformationen von

$$xx' = j^2$$

also alle Kongruenzen enthalten. Die bloß aus Schiebungen und Drehungen zusammengesetzten Kongruenzen sollen Bewegungen heißen; die anderen Symmetrien.

94. Setzt man $au = b$, also $a'u' = b'$, so kann die Transformation*):

$$y = a \cdot \frac{x + u}{j^2 u' x + 1} a'^{-1}$$

oder

$$y = \frac{ax + b}{j^2 b' x + a'}$$

durch die „Biquaternion“ $a + bj$ repräsentiert werden, für welche noch $i_1 j + j i_1 = i_2 j + j i_2 = 0$ festgesetzt wird. Der aus zwei Transformationen

$$y = \frac{ax + b}{j^2 b' x + a'}, \quad z = \frac{cy + d}{j^2 d' y + c'}$$

zusammengesetzten Transformation

$$z = \frac{Ax + B}{j^2 B' x + A'}$$

entspricht das Produkt der zugehörigen Biquaternionen:

$$A + Bj = (c + dj)(a + bj).$$

Eine Biquaternion $a + bj$ heißt elliptisch im Falle $j^2 = -1$, hyperbolisch im Falle $j^2 = 1$, (parabolisch im Falle $j^2 = 0$).

Aber nicht jede Biquaternion

$$(a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_1 i_2 a_{12}) + (b_0 + i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_1 i_2 b_{12}) j$$

repräsentiert eine Kongruenz, sondern nur diejenigen, für welche

*) Vgl. hier und im folgenden des Verfassers Aufsätze: Über komplexe Zahlen in mehr Dimensionen (Königsberger Physikalisch-ökonomische Gesellschaft 1898). Über Bewegungen und komplexe Zahlen (Math. Ann. 55, 1902, p. 585).

$$au = b$$

und u ein Vektor ist. Also muß auch:

$$(a_0 - i_1 a_1 - i_2 a_2 - i_1 i_2 a_{12})\,(b_0 + i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_1 i_2 b_{12})$$

ein Vektor, d. h.

$$a_0 b_{12} - a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_{12} b_0 = 0$$

sein. Setzt man $j i_1 i_2 = \varepsilon$ $(\varepsilon^2 = -j^2)$ und substituiert

$$\begin{array}{l} b_0 \parallel -b_{12} \\ b_1 \parallel b_2 \\ b_2 \parallel -b_1 \\ b_{12} \parallel b_0 \end{array}$$

so wird die Biquaternion $Q =$

$$(a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2) + \varepsilon\,(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_{12} i_1 i_2)$$

mit der Bedingung:

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12} = 0.$$

Diese Bedingung läßt sich bei einer beliebigen nicht singulären Biquaternion durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $\varrho + \sigma\varepsilon$ stets erreichen. Es wird nämlich

$$(\varrho + \sigma\varepsilon)\,Q = (\varrho + \varepsilon\sigma)\,(a_0 + \varepsilon b_0) + (\varrho + \varepsilon\sigma)\,(a_1 + \varepsilon b_1)\,i_1$$
$$+ (\varrho + \varepsilon\sigma)\,(a_2 + \varepsilon b_2)\,i_2 + (\varrho + \varepsilon\sigma)\,(a_{12} + \varepsilon b_{12})\,i_1 i_2,$$

also muß:

$$(a_0\varrho + \varepsilon^2 b_0\sigma)\,(a_0\sigma + b_0\varrho) + (a_1\varrho + \varepsilon^2 b_1\sigma)\,(a_1\sigma + b_1\varrho)$$
$$+ (a_2\varrho + \varepsilon^2 b_2\sigma)\,(a_2\sigma + b_2\varrho) + (a_{12}\varrho + \varepsilon^2 b_{12}\sigma)\,(a_{12}\sigma + b_{12}\varrho) = 0$$

sein. Das gibt für $\frac{\varrho}{\sigma}$ die quadratische Gleichung:

$$(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12})\,\varrho^2 + (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_{12}{}^2 +$$
$$\varepsilon^2 (b_0{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_{12}{}^2))\,\varrho\sigma + (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12})\,\varepsilon^2\sigma^2 = 0,$$

mit der positiven Diskriminante

$$D = (a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_{12}{}^2 + \varepsilon^2 (b_0{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_{12}{}^2))^2$$
$$- 4\,\varepsilon^2 (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12})^2.$$

Denn für $\varepsilon^2 = -1$ ist D die Summe zweier Quadrate, für $\varepsilon^2 = +1$ wird

$$D = ((a_0 + b_0)^2 + (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_{12} + b_{12})^2)\cdot$$
$$((a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_{12} - b_{12})^2),$$

also stets > 0, außer, wenn

$$a = \pm b$$

ist. Demnach repräsentiert im Falle $\varepsilon^2 = -1$ jede Biquaternion $a + \varepsilon b$, im Falle $\varepsilon^2 = +1$ jede außer den singulären $a(1 \pm \varepsilon)$ eine Bewegung.

95. Im Falle $j^2 = +1$ sind stets uneigentliche Elemente vorhanden, unabhängig davon, ob Meßbarkeit besteht oder nicht. Besteht Meßbarkeit, so ist also die Dreieckswinkelsumme kleiner als zwei Rechte. Besteht nicht Meßbarkeit, so beschränke man sich zunächst auf ein Teilgebiet, in dem Meßbarkeit besteht; in diesem ist die Dreieckswinkelsumme kleiner als zwei Rechte, folglich auch allgemein.

Im Falle $j^2 = -1$ liefert z. B. die Quaternion

$$a = r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i_1 \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

die Kongruenz $y_0 + i_1 y_1 = (\cos\alpha + i_1 \sin\alpha)(x_0 + i_1 x_1)$, $(y_3 = x_3 = 1)$ auf der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Setzt man $\frac{x_1}{x_0} = \operatorname{tg}\xi$, $(0 \leq \xi < \pi)$ und nennt ξ das Argument des Punktes $(x_0, x_1, 0, 1)$, so entspricht dem Antragen einer Strecke an einen Punkt ξ die Vermehrung des Arguments ξ um eine Größe α; denn es wird:

$$y_0 + i_1 y_1 = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}\,(\cos(\xi + \alpha) + i_1 \sin(\xi + \alpha)).$$

Besteht also Meßbarkeit, d. h. existiert bei gegebenem ξ, α stets eine ganze Zahl k so, daß $k\alpha > \xi$ ist, so existiert auf der Geraden $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, also überhaupt, kein uneigentlicher Punkt, da alle Punkte Argumente $< \pi$ haben, also durch Abtragen einer Strecke mit irgend einem Argument α stets erreicht werden können. Infolgedessen ist in diesem Falle stets die Winkelsumme größer als zwei Rechte.

Koordinaten, Euklidisch.

96. Im folgenden wird die Winkelsumme des Dreiecks gleich zwei Rechten vorausgesetzt. Parallel (‖) sind zwei Gerade einer Ebene, die auf einer dritten senkrecht (⊥) stehen. Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden $\mathfrak{G}$ zwar genau eine Parallele, aber eventuell, nämlich wenn keine Meßbarkeit besteht, mehrere die Gerade $\mathfrak{G}$ nicht schneidende Gerade derselben Ebene. Alle Parallele einer Geraden gehen durch denselben Punkt, den Grenzpunkt der Geraden; derselbe ist Grenzpunkt auf jeder durch ihn gehenden Geraden. Die Gesamt-

heit der Grenzpunkte im Raume verhält sich wie eine Ebene, in der Ebene wie eine Gerade.

97. Definition: Ein Paar Strecken a, b heißt ein „Verhältnis“ $\frac{a}{b}$; Verhältnisse gleicher Strecken heißen gleich. Demnach kann jedes Verhältnis $\frac{a}{b}$ durch drei Punkte (OAB) einer Geraden repräsentiert werden, wo $OA = a$, $OB = b$, O nicht zwischen AB ist. Ist $OA_1 = OA$ auf derselben Geraden, also O zwischen A_1, B, so heißt das Verhältnis (OA_1B) das negative des Verhältnisses (OAB); $(OA_1B) = -(OAB)$. Zwei Verhältnisse heißen gleich, wenn sie resp. gleich (OAB) und $(OA'B')$ sind und $[AA'] \parallel [BB']$ ist. Die zwei Definitionen für Gleichheit von Verhältnissen sind zulässig, denn es besteht der Satz*):

98. Satz: Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.

Beweis: Ist $(OAB) = (OA'B')$, $(OA'B') = (OA''B'')$, so ist entweder $A = A'$, $B = B'$, also $(OAB) = (OA''B'']$. Oder es ist $[AA'] \parallel [BB']$, oder es ist $OA = OA'$, $OB = OB'$; sind dann M, N die Mittelpunkte von $A'A''$, $B'B''$; so sind $[AA'] \perp [MN] \perp [BB']$, also auch $[AA'] \parallel [BB']$; also nach dem Desarguesschen Satze auch $[AA''] \parallel [BB'']$, d. h. $(OAB) = (OA''B'')$.

Trägt man alle Verhältnisse an einen andern Punkt O' statt O an, so folgt der Satz aus der Kongruenz der Figuren bei O und bei O'.

99. Satz: Ein gegebenes Verhältnis ist immer einem Verhältnis (OAB) mit gegebenen O, A oder mit gegebenen O, B gleich und der Punkt B resp. A dadurch eindeutig bestimmt.

Beweis: Das Verhältnis sei gleich $(OA'B')$ und $[B'B] \parallel [A'A]$, B auf $[OA]$; also $(OAB) = (OA'B')$. B ist eindeutig bestimmt; denn wäre $(OAB) = (OAB_1)$, so müßte wegen $OA = OA_1$ auch $OB = OB_1$, $B = B_1$ sein.

100. Definition: Die Summe zweier Verhältnisse wird definiert durch

*) Die folgende Theorie der Verhältnisse enthält die Euklidische Proportionenlehre (Euclidis Elementa ed. Heiberg, lib. V) in sich, die also hier ohne Voraussetzung der Meßbarkeit begründet wird. Derartige Begründungen finden sich neuerdings bei Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Kap. III, Kneser, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Dez. 1901 p. 4 im Archiv der Math. und Phys. (3) 2 (1902), Mollerup, Math. Ann. 56 (1903) p. 277 und Studier over den plane geometrics aksiomer (Kopenhagen 1903), Schur, Math. Ann. 57 (1903) p. 205; vgl. auch Kupffer, Sitzungsber. der Naturforscherges. zu Dorpat 1893; Kneser, Math. Ann. 58 (1904) p. 583.

$$(OAB) + (OA'B) = (OA''B)$$

mit

$$OA + OA' = OA'',$$

wenn O nicht zwischen A, A', sonst

$$OA - OA' = OA'',$$

wenn $OA > OA'$. Die Addition der Verhältnisse ist also wie die der Strecken assoziativ und kommutativ. Die Verhältnisse (OOB) mit $B \neq O$ und nur diese sind Null.

101. Definition: Das Produkt zweier Verhältnisse wird definiert durch:

$$(OAB)\,(OBC) = (OAC).$$

Die Verhältnisse (OBB) und nur diese sind Eins; (OAB), (OBA) sind reziprok, und es wird $(OAB) + (BAO) = 1$. Die Multiplikation ist assoziativ, denn es ist

$$((OAB)\,(OBC))\,(OCD) = (OAC)\,(OCD) = (OAD) = (OAB)\,(OBD)$$
$$= (OAB)\,((OBC)\,(OCD)).$$

102. Satz: Die Multiplikation der Verhältnisse ist kommutativ.

Beweis: Aus $(OAB) = (OCD)$ folgt $(OAC) = (OBD)$; (s. Fig.) denn ist $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$, $OD = OD'$, so ist

$$[A'C] \mid [B'D], \quad [B'B] \mid [C'C],$$

also nach dem Pascalschen Satze $[A'B] \mid [C'D]$, d. h. $(OAC) = (OBD)$. Demnach wird stets:

$$(OAB)\,(OBC) = (OAC) = (OBD) = (OBC)\,(OCD) = (OBC)\,(OAB).$$

Folgerung: Aus $(OAB) = (OCD)$ folgt

$$(OAE)\,(ODE) = (OAB)\,(OBC)\,(ODE)$$
$$= (OBE)\,(OCD)\,(ODE)$$
$$= (OBE)\,(OCE).$$

103. Satz: Addition und Multiplikation der Verhältnisse sind distributiv.

Beweis: Es ist

$$((OAB)+(OA'B))(OBC)=(OA''B)(OBC)=(OA''C)=(OAC)+(OA'C)$$
$$=(OAB)(OBC)+(OA'B)(OBC).$$

104. Definition: Zwei Figuren heißen ähnlich ($\sim$), wenn sie in allen homogenen Winkeln und Verhältnissen übereinstimmen; z. B. sind kongruente Figuren ähnlich. Sind zwei Figuren einer dritten ähnlich, dann sind sie einander ähnlich.

105. Satz: Es gibt zu jeder Figur $OABC\ldots$ eine ähnliche Figur $OA'B'C'\ldots$, wenn A' gegeben, und $[OA]=[OA']$, $[OB]=[OB']$, ... usw.

Beweis: Man bestimme B', C', ... aus

$$(OAA')=(OBB')=(OCC')=\cdots$$

dann sind auch die Verhältnisse $\frac{OA}{OB}$ den entsprechenden gleich, da aus $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$ stets $\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$ folgt. Dann sind auch die Verhältnisse $\frac{AB}{CD}$ den entsprechenden gleich; denn es ist (s. Fig.)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B^0B'}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OD}{OD'}=\frac{CD}{C'D'},$$

also
$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

Dann sind auch alle homologen Winkel gleich, denn es ist z. B. $\angle ABC=ABO+OBC=A'B'O+OB'C'=A'B'C'$.

106. Satz: Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind sie ähnlich.

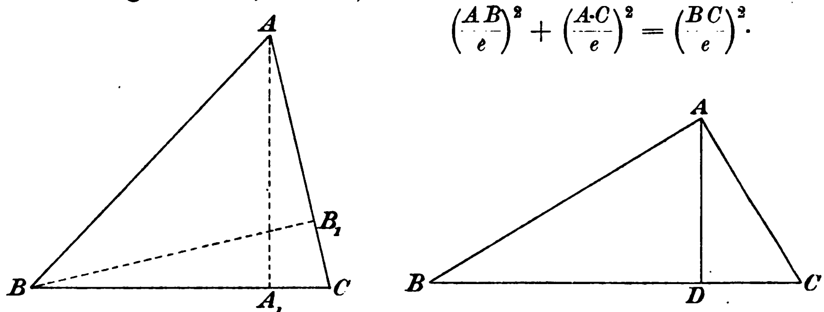
Beweis: Wegen der Gleichheit der Winkelsumme stimmen sie auch in den dritten Winkeln überein. Ist ABC das eine Dreieck und AB' auf AB, AC' auf AC den homologen Seiten des andern gleich, so ist $AB'C'$ dem zweiten kongruent. Also nach Voraussetzung $\angle AB'C'=ABC$, also $[BC]\,||\,[B'C']$, also $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$, also (104) $ABC\sim AB'C'$.

107. Satz: Ist im Dreieck ABC (s. die erste Fig. S. 288) $[AA_1]\perp[BC]$, $[BB_1]\perp[AC]$, so ist $AA_1C\sim BB_1C$, also $\frac{AA_1}{AC}=\frac{BB_1}{BC}$.

Beweis aus 104, da Winkel $ACA_1=BCB_1$, $AA_1C=BB_1C$ = einem Rechten ist.

108. Satz: Ist ABC ein bei A rechtwinkliges Dreieck und e eine beliebige Strecke, so ist*)

$$\left(\frac{AB}{e}\right)^2 + \left(\frac{AC}{e}\right)^2 = \left(\frac{BC}{e}\right)^2.$$



Beweis: Ist $[AD] \perp [BC]$, so ist $ABD \sim CAB$, $ACD \sim BCA$, also $\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC}$, $\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB}$, also (101 Folg.) $\left(\frac{BA}{e}\right)^2 = \frac{BD}{e} \cdot \frac{BC}{e}$, $\left(\frac{CA}{e}\right)^2 = \frac{CD}{e} \cdot \frac{CB}{e}$, also $\left(\frac{AB}{e}\right)^2 + \left(\frac{AC}{e}\right)^2 = \frac{BC}{e}\left(\frac{BD + CD}{e}\right) = \left(\frac{BC}{e}\right)^2$.

109. Definition: Durch einen eigentlichen Punkt O lege man drei Gerade $[OE_1]$, $[OE_2]$, $[OE_3]$, die in keiner Ebene liegen. Durch einen eigentlichen Punkt P ziehe man $[PP_1] \parallel [OE_1]$, $[PP_2] \parallel [OE_2]$, $[PP_3] \parallel [PE_3]$, so daß P_1, P_2, P_3 in resp. $\{OE_2E_3\}$, $\{OE_3E_1\}$, $\{OE_1E_2\}$ liegen. Als Koordinaten von P werden definiert die Verhältnisse $x = \frac{P_1P}{OE_1}$, $y = \frac{P_2P}{OE_2}$, $z = \frac{P_3P}{OE_3}$, mit den Vorzeichen $+$ resp. $-$ genommen, je nachdem (z. B.) P und E_1 auf derselben resp. auf verschiedenen Seiten von $\{OE_2E_3\}$ liegen.

Einer nicht durch O gehenden Ebene $\{ABC\}$, welche $[OE_1]$, $[OE_2]$, $[OE_3]$ resp. in A, B, C trifft, werden die Koordinaten $\frac{OE_1}{OA}$, $\frac{OE_2}{OB}$, $\frac{OE_3}{OC}$, 1 beigelegt; ist sie parallel z. B. zu $[OE_1]$, so wird statt $\frac{OE_1}{OA}$ Null gesetzt. Eine durch O gehende zu $\{ABC\}$ parallele Ebene bekommt die Koordinaten $\frac{OE_1}{OA}$, $\frac{OE_2}{OB}$, $\frac{OE_3}{OC}$, 0.

110. Satz: Liegt der Punkt (x, y, z) in der Ebene $\{a, b, c, d\}$, so besteht die Gleichung

$$ax + by + cz = d.$$

Beweis: Geht die Ebene zunächst nicht durch O, ist also $d = 1$, und ist sie keiner der Achsen parallel, so sei

*) Der Satz des Pythagoras, aber als Beziehung nicht zwischen Flächen, sondern zwischen Strecken-Verhältnissen.

$$P^0 = ([CP][AB]) = (x^0, y^0, 0);$$

dann ist

$$ax^0 + by^0 = \frac{BP^0}{BA} + \frac{AP^0}{AB} = 1$$

und

$$x = x^0 \frac{PC}{P^0C}, \quad y = y^0 \frac{PC}{P^0C},$$

also

$$ax + by = \frac{PC}{P^0C} = 1 - \frac{P^0P}{P^0C} = 1 - cz.$$

Geht die Ebene durch $[AB]$ und ist parallel $[OE_3]$, ist also $c = 0$, so ist ebenso $x = x^0$, $y = y^0$, also

$$ax + by = 1.$$

Geht die Ebene durch A und ist parallel $\{OE_2E_3\}$, ist also $b = 0$, $c = 0$, so ist für jeden Punkt P

$$x = \frac{OA}{OE_1}, \quad \text{also} \quad ax = 1.$$

Liegt der Punkt (x^0, y^0, z^0) in der Ebene $\{a, b, c, d\}$, so ist also stets:

$$ax^0 + by^0 + cz^0 = d,$$

folglich auch

$$a(x - x^0) + b(y - y^0) + c(z - z^0) = 0$$

für jeden Punkt (x, y, z) der Ebene $\{a, b, c, d\}$. Daraus folgt durch Parallelverschiebung:

$$x - x_0 \parallel x$$
$$y - y_0 \parallel y$$
$$z - z_0 \parallel z$$

die Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

für jeden Punkt der Ebene $\{a, b, c, 0\}$.

111. Nunmehr sollen rechtwinklige Koordinaten angenommen werden, d. h. $\angle E_1OE_2 = E_3OE_3 = E_3OE_1 =$ einem Rechten sein. Außerdem soll $OE_1 = OE_2 = OE_3 = e$ gesetzt und als Einheit der Strecken gewählt werden. Hat dann P die Koordinaten (x_0, x_1, x_2), $\bar{P}$ die Koordinaten $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, so ist

$$\left(\frac{P\bar{P}}{e}\right)^2 = (x_0 - \bar{x}_0)^2 + (x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2,$$

wie sich durch zweimalige Anwendung von 107 ergibt. Eine Kongruenz wird durch eine Transformation der Koordinaten repräsentiert, bei welcher die Strecken unverändert bleiben. Dieselbe ist zusammen-

zusetzen aus einer Schiebung und einer Drehung und eventuell einer Spiegelung. Ordnet man dem Punkte (x_0, x_1, x_2) den Vektor

$$x = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2$$

zu, so wird eine Schiebung durch eine Transformation $y = x + u$ repräsentiert, wo $u = u_0 + u_1 i_1 + u_2 i_2$ ein Vektor ist.

112. Durch die Transformation

$$y = a x a'^{-1},$$

in welcher

$$a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2$$
$$a' = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2$$

konjugierte Quaternionen, a_0, a_1, a_2, a_{12} Verhältnisse sind, wird eine Drehung um den Punkt O repräsentiert. Denn gehen die Punkte $P(x_0 x_1 x_2)$, $\overline{P}(\bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2)$ dabei über in $(y_0 y_1 y_2)$, $(\bar{y}_0 \bar{y}_1 \bar{y}_2)$, so bleibt das Quadrat der Strecke $P\overline{P}$, also diese selbst ungeändert; es wird nämlich:

$$\begin{aligned}(y - \bar{y})(y' - \bar{y}') &= (a x a'^{-1} - a \bar{x} a'^{-1})(a' x' a^{-1} - a' \bar{x}' a^{-1}) \\ &= a(x - \bar{x}) a'^{-1} \cdot a'(x' - \bar{x}') a^{-1} \\ &= a(x - \bar{x})(x' - \bar{x}') a^{-1} \\ &= (x - \bar{x})(x' - \bar{x}').\end{aligned}$$

Daß jede Drehung um O durch $y = a x a'^{-1}$ repräsentiert wird, beweist man wie in 91. Die Quaternion $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2$, Repräsentant der Drehung $y = a x a'^{-1}$, kommt nur bis auf einen Verhältnisfaktor in Betracht; derselbe kann so gewählt werden, daß $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_{12}^2 = 1$ ist. Eine solche Quaternion heißt ein Versor. Die Zusammensetzung der Quaternionen oder der Versoren, also auch der Drehungen ist assoziativ, aber nicht kommutativ; die Versoren oder Drehungen bilden eine Gruppe.

113. Eine Drehung, die zweimal angewandt die Identität ergibt, heißt eine „Umwendung". In den zugehörigen Versoren ist $a_0 = 0$. Eine Umwendung wird durch ihre „Umwendachse" $\mathfrak{A}$ völlig repräsentiert. Die aus zwei Umwendungen um Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von O zusammgesetzte Bewegung ist eine Drehung um O. Die Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ gehen in Gerade $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ der Ebene $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$ über, die also die feste Ebene dieser Drehung ist, und der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ ist mithin der Drehungswinkel. Diese Drehung kann als Quotient der Umwendungen um $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, als $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ aufgefaßt werden. Zwei gegebene Drehungen kann man als $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ darstellen, indem man für $\mathfrak{B}$ die

Schnittgerade der festen Ebenen beider nimmt (resp. eine Gerade der gemeinsamen festen Ebene), wodurch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmt sind. Die Zusammensetzung der Drehungen erfolgt dann vermittelst

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}.$$

114. Aus 111, 112 folgt, daß jede Kongruenz durch eine Transformation

$$y = a(\pm x + u)\, a'^{-1} = \frac{\pm ax + b}{\pm j^2 b' x + a'}$$

repräsentiert wird, wo $au = b$, $j^2 = 0$ ist; die Bewegung

$$y = \frac{ax + b}{j^2 b' x + a'}$$

kann also wie in 93 durch die „parabolische" Biquaternion

$$a + bj$$

mit $j^2 = 0$ repräsentiert werden, in welcher $a^{-1}b$ ein Vektor ist.

Führt man statt j jetzt $\varepsilon = j i_1 i_2$ ein, so kann eine beliebige nichtsinguläre Biquaternion

$$A + \varepsilon B = (a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2) + \varepsilon (b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_{12} i_1 i_2)$$

durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $\varrho + \varepsilon\sigma$ in eine solche verwandelt werden, in welcher, wie jetzt erforderlich, $A^{-1} B i_1 i_2$ ein Vektor, d. h.

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12} = 0$$

ist. Denn die für $\frac{\sigma}{\varrho}$ erhaltene Gleichung (s. 93):

$$(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_{12} b_{12})\, \varrho + (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_{12}^2)\, \sigma = 0$$

hat stets eine Wurzel, wenn nicht $a_0 = a_1 = a_2 = a_{12} = 0$, also $A + \varepsilon B = \varepsilon B$ singulär wird. Demnach repräsentiert jede nichtsinguläre parabolische Biquaternion eine Bewegung. Man kann bei einer solchen immer

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_{12}^2 = 1$$

annehmen, da man dies, wegen $a_0^2 + a_1^2 + a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, durch einen Faktor stets erreichen kann.

115. Eine beliebige Bewegung ist durch zwei sich in ihr entsprechende kongruente Dreiecke definiert. Geht das Dreieck ABC durch eine Bewegung in das kongruente Dreieck $A'B'C'$ über, so sei $\mathfrak{A}$ diejenige der beiden Geraden, welche den kürzesten Abstand p der Geraden $[AB]$ und $[A'B']$ senkrecht halbieren und in den Halbierungsebenen der Winkel der Ebenen $\{p\,[AB]\}$ und $\{p\,[A'B']\}$

liegen, um welche umgewendet $[AB]$ mit Berücksichtigung des Sinnes in $[B'A']$ übergeht. Geht das Dreieck ABC durch Umwendung um $\mathfrak{A}$ in $A_1B_1C_1$ über, so sei $\mathfrak{B}$ diejenige senkrechte Halbierende von $A'A_1$, welche in der Halbierungsebene des Winkels der Halbebenen $[A'B']C'\}$ und $[A_1B_1]C_1\}$ liegt; dann geht $A_1B_1C_1$ durch Umwendung um $\mathfrak{B}$ in $A'B'C'$ über. Demnach ist die Bewegung als Folge der beiden Umwendungen um $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ oder als Quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ dargestellt.*)

116. Die Bewegung $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ führt die (resp. jede) gemeinsame Senkrechte $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in sich über und verschiebt jeden Punkt von $\mathfrak{S}$ um den doppelten Abstand der Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; ferner dreht sie jede Ebene von $\mathfrak{S}$ um den doppelten Winkel der Ebenen $\{\mathfrak{S}\mathfrak{A}\}$ und $\{\mathfrak{S}\mathfrak{B}\}$, sie besteht also in einer „Schraubung" um die „Schraubungsachse" $\mathfrak{S}$.**)

Um zwei Bewegungen zusammenzusetzen, stelle man sie als $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ und $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ dar, indem man als Umwendachse $\mathfrak{B}$ die (resp. eine) gemeinsame Senkrechte ihrer Schraubungsachsen wählt; dadurch sind die beiden anderen Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ bestimmt und es wird

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}$$

die zusammengesetzte Bewegung.***)

117. Definition: Ein derartiges Entsprechen zwischen den Punkten des Raumes, daß ähnlichen Figuren ähnliche Figuren entsprechen, heißt eine „Ähnlichkeit". Eine Ähnlichkeit, der in 104 betrachteten Art heißt eine Dehnung; dieselbe wird durch das Verhältnis (OAA') charakterisiert. Ist dasselbe gleich k, so wird die Dehnung durch die Transformation

$$y = kx$$

repräsentiert. Insbesondere entspricht dem Verhältnis $k = -1$ eine Spiegelung an O. Eine Dehnung heißt positiv oder negativ, je nachdem ihr Verhältnis es ist. Eine negative Dehnung ist aus einer positiven und einer Spiegelung an O zusammenzusetzen.

118. Eine aus einer Drehung und einer positiven Dehnung mit festem O zusammengesetzte Ähnlichkeit heißt eine „Mutation" um

---

*) s. Wiener, Leipz. Ber., Math.-phys. Klasse, 42 (1890) p. 76.

**) Diese einfache Herleitung eines alten Satzes (s. z. B. C. Neumann, Math. Ann. 1, 1869, p. 195) verdankt man Wiener l. c. p. 76.

***) Wiener l. c. p. 13.

O.*) Ist eine Mutation aus einer Drehung $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ und einer Dehnung mit dem Verhältnis $\frac{OA}{OB}$ zusammengesetzt, so kann dieselbe als Vektorenquotient $\frac{OA \text{ auf } \mathfrak{A}}{OB \text{ auf } \mathfrak{B}}$ repräsentiert werden.

Das Produkt zweier Mutationen wird gebildet, indem man sie als $\frac{OA}{OB}$ und $\frac{OB}{OC}$ darstellt, worin man für OB einen beliebigen Vektor der Schnittgeraden ihrer festen Ebenen wählt. Dadurch sind die Vektoren OA, OC der Länge und Richtung nach bestimmt und das Produkt der Mutationen wird:

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OC}.$$

Die Multiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

Die Summe zweier Mutationen werde definiert, indem man dieselben als $\frac{OA}{OB}$, $\frac{OA'}{OB}$ darstellt. Ist dann OA'' die Summe der Vektoren OA, OA' (s. IV 56, S. 188), so wird die Summe der beiden Mutationen erklärt durch

$$\frac{OA}{OB} + \frac{OA'}{OB} = \frac{OA''}{OB}.$$

Die Addition der Mutationen ist assoziativ und kommutativ, da die der Vektoren es ist. Addition und Multiplikation der Mutationen sind distributiv, wie geometrisch nachzuweisen ist oder daraus folgt, das es für die Quaternionen gilt. Demnach bilden die Mutationen ein Zahlensystem.

Entsprechend kann man auch bei beliebigen Ähnlichkeiten, aber nicht bei beliebigen Kongruenzen oder Bewegungen, Addition und Multiplikation definieren, so daß auch diese nicht nur eine Gruppe, sondern ein Zahlensystem bilden. (Man nehme in IV 88 statt der Tensoren t Vektoren-Quotienten.)

Vollständigkeit und Widerspruchlosigkeit.

119. Die Grundsätze der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz bilden mit jeder der drei Annahmen, die über die Existenz der uneigentlichen Elemente möglich sind, zusammen je ein widerspruchloses und vollständiges System von Grundsätzen, da sich dieselben in widerspruchlosen und vollständigen Koordinaten-Geometrien verwirklicht finden. Eine Koordinaten-Geometrie im System der ge-

*) Gauß, Werke Bd. VIII p. 357.

wöhnlichen reellen und imaginären Zahlen ist widerspruchlos und vollständig, d. h. es kann jeder Satz in ihr rein rechnerisch bewiesen werden und die richtige Anwendung der zu Grunde liegenden Sätze führt dabei niemals auf eine unrichtige Zahlengleichung; denn das Zahlensystem ist widerspruchlos und vollständig, weil es andernfalls nicht existieren könnte.

120. Die Entdeckung der hyperbolischen*) Geometrie, d. h. derjenigen Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher uneigentliche Elemente existieren, verdankt man bekanntlich J. Bolyai und Lobatschefsky, welche dieselbe ungefähr gleichzeitig, unabhängig voneinander gefunden haben. Gauß hat, wie aus seinem Nachlaß hervorgeht, schon 30 Jahre vorher ziemlich genaue Kenntnisse in derselben besessen.

Obwohl man in der Geometrie des Bündels eine ebene elliptische Geometrie, d. h. eine Geometrie ohne uneigentliche Elemente kannte, blieb die Möglichkeit einer Raumgeometrie derselben Art unbemerkt, bis Riemann**) diese, wenn auch nur an einer Koordinaten-Geometrie, also ohne Aufbau aus einem System von Grundsätzen und mit Benutzung der Stetigkeit und der Meßbarkeit nachwies.***)

Die Entbehrlichkeit der Meßbarkeit für ein großes Gebiet in der Geometrie entdeckt zu haben ist das Verdienst Veroneses.†)

Verzichtet man auf die Meßbarkeit, so sind die drei möglichen Geometrien mit Rücksicht auf 58, 66 nicht mehr nach der Menge der uneigentlichen Punkte auf einer Geraden, sondern nur nach der Dreieckswinkelsumme zu unterscheiden.

Flächeninhalt.

121. Die Lehre von den Flächeninhalten von Polygonen in der Euklidischen Ebene ist zuerst von Hilbert††) unabhängig von Stetigkeits- oder Meßbarkeitsaxiomen lediglich auf die Theorie der Kongruenz gegründet worden. Hilbert legt die Definition zugrunde:

122. Definition: Zwei Polygone heißen inhaltgleich, wenn sie

*) Die Bezeichnungen hyperbolisch, elliptisch, parabolisch für die drei möglichen Geometrieen wurden eingeführt von F. Klein, Gött. Nachr. 1871 Nr. 17 = Math. Ann. 4 (1871) p. 573.

**) Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Habilitationsschrift, Göttingen 1854, Abhandlungen der Gött. Ges. d. Wiss. = Riemanns Werke (Leipzig 1876) p. 254.

***) Über die Geschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie vgl. insbesondere: Engel und Stäckel, Urkunden zur Geschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie I 2 (Leipzig 1899) p. 373 ff.

†) Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1904.

††) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Kap. IV.

sich beide aus denselben Dreiecken additiv und subtraktiv zusammensetzen lassen.

123. Dann läßt sich bekanntlich jedes Polygon in ein inhaltgleiches rechtwinkliges Dreieck von gegebener Kathete transformieren und es bedarf nur des Nachweises, daß das Resultat dieser Transformation ein eindeutiges ist. Dieser Nachweis gelingt, indem man jedem Dreieck als „Inhaltsmaß" I das (halbe) Produkt aus $\frac{a}{e}$ und $\frac{h_a}{e}$ beilegt, wenn a eine Grundlinie, h_a die zugehörige Höhe, e eine gegebene Einheitsstrecke ist; ein Polygon erhält als Inhaltsmaß die Summe der Inhaltsmaße von Dreiecken, in die es zerfällt.

Zunächst ist das Inhaltsmaß eines Dreiecks unabhängig davon, welche Seite man als Grundlinie wählt. Dies folgt sofort aus 107 und 102 Folgerung. Zerfällt ein Dreieck durch eine Ecktransversale in zwei Teildreiecke, so ist (nach 103) das Inhaltsmaß des ganzen gleich der Summe der Inhaltsmaße der Teildreiecke. Eine beliebige Zerlegung eines Dreiecks ABC in Teildreiecke kann durch solche „transversale" Zerlegungen erzeugt werden. Denn man ziehe von A aus Transversalen durch alle im Innern und auf $[BC]$ liegenden Ecken von Teildreiecken, und sind z. B. $[AB_1]$, $[AC_1]$ zwei aufeinander folgende derselben, zwischen denen also keine andere liegt, und liegen auf $[AB_1]$ von B_1 auf $[BC]$ an der Reihe nach die Schnittpunkte B_2, B_3, ... mit Seiten von Teildreiecken, und entsprechend auf $[AC_1]$ die Punkte C_1, C_2, C_3, ... so ist z. B. $[B_1C_2]$ eine Transversale von AB_1C_1, dann z. B. $[C_2B_2]$ eine von AB_1C_2 usw. Durch derartige transversale Zerlegungen wird auch jedes Teildreieck transversal zerlegt. Daraus folgt, daß die Summe der Inhaltsmaße der Teildreiecke bei jeder Zerlegung dem Inhaltsmaß des Dreiecks gleich ist. Zu zwei verschiedenen Zerlegungen eines Polygons in Teildreiecke existiert stets eine Zerlegung, aus der beide durch verschiedenartiges Zusammenfassen der Teildreiecke hervorgehen. Demnach ist auch das Inhaltsmaß eines Polygons von der besonderen Zerlegung unabhängig. Zerfällt ein Polygon R in die Summe zweier Polygone $P+Q$, so folgt für die Inhaltsmaße I

$$I(P+Q) = I(P) + I(Q),$$

also auch

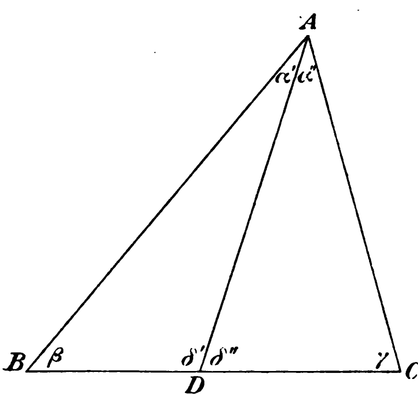
$$I(R) - I(P) = I(R-P),$$

also haben auch inhaltgleiche Polygone gleiches Inhaltsmaß. Daraus folgt, daß die Transformation eines Polygons auf ein inhaltgleiches rechtwinkliges Dreieck mit gegebener Kathete a eine eindeutige ist. Denn erhält man zwei inhaltgleiche Dreiecke mit den anderen Katheten b und b', so muß nach vorhergehendem

$$\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{e} = \frac{a}{e} \cdot \frac{b'}{e},$$

also $b = b'$ sein.

124. Diese Überlegungen sind fast unmittelbar auf den Nicht-Euklidischen Fall zu übertragen, in welchem keine uneigentlichen Punkte existieren, indem man als Inhaltsmaß eines Dreiecks den stets positiven Exzeß der Winkelsumme über 2 Rechte, als Inhaltsmaß eines Polygons die Summe der Inhaltsmaße der es bildenden Dreiecke einführt. Denn auch hier existiert eine Transformation eines Polygons in ein inhaltgleiches rechtwinkliges Dreieck gegebener Kathete (vgl. die unter 59 angewandte Lexellsche*) Umformung), und auch hier ist das Inhaltsmaß gleich bei inhaltgleichen Polygonen, wovon man sich nur bei einem in zwei Dreiecke transversal zerlegten Dreieck zu überzeugen braucht. Es ist nämlich (s. Fig.)



$$\alpha + \beta + \gamma - 2 \text{ Rechte} =$$
$$(\alpha' + \beta + \delta' - 2 \text{ Rechte}) +$$
$$(\alpha'' + \gamma + \delta'' - 2 \text{ Rechte}).$$

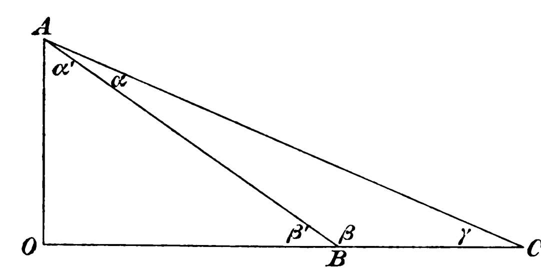
Wären nun zwei rechtwinklige Dreiecke, OAB, OAC (s. die zweite Fig.) die nur in einer Kathete übereinstimmen, inhaltgleich, so wäre

$$\alpha' + \beta' - 1 \text{ Rechten} =$$
$$\alpha + \alpha' + \gamma - 1 \text{ Rechten},$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ Rechten},$$

gegen 59.



Im Nicht-Euklidischen Fall mit uneigentlichen Punkten leistet der stets positive Defekt der Winkelsumme an 2 Rechten denselben Dienst als Inhaltsmaß, wenn man keinen Anstoß daran nimmt, daß bei der fraglichen Transformation

*) Lexell, Acta Petropolitana 1781 I. Vgl. auch Euler, Nova Acta Tom. X p. 47. Legendre, Géométrie, Note X. J. Steiner, Crelles Journal 2 (1827) p. 45 = Werke I (Berlin 1881) p. 101. Lobatschefsky, Neue Anfangsgründe der Geometrie, deutsch von Engel (Leipzig 1898) § 68 p. 133. Gauß, Werke VIII p. 292.

eines Polygons uneigentliche Eckpunkte und Kongruenzen zwischen z. T. uneigentlichen Dreiecken auftreten können.

Diese Schwierigkeit ist entweder nach 39 ff. zu beseitigen oder durch diejenige Wendung des Gedankens zu vermeiden, durch welche im folgenden die Begründung der Lehre vom Rauminhalt gelingt.

Rauminhalt.

125. Die Hilbertsche Definition der Inhaltsgleichheit von Polygonen läßt sich nicht in analoger Weise auf den Inhalt von Polyedern ausdehnen, da Dehn*) und Kagan**) gezeigt haben, daß raumgleiche Polyeder existieren, die nicht aus denselben Teilpolyedern additiv und subtraktiv zusammensetzbar sind. Hilbert ist der Ansicht, damit sei „die Unmöglichkeit dargetan, die Lehre von den räumlichen Inhalten so zu begründen, wie dies im vorstehenden für die ebenen Inhalte geschehen ist. Hiernach wären zur Behandlung der analogen Fragen für den Raum andere Hilfsmittel, etwa das Cavalierische Prinzip heranzuziehen“.***)

Daß dies nicht notwendig ist, soll im folgenden gezeigt werden.

126. Es genügt, die folgenden Definitionen zugrunde zu legen:

Definition: 1) Ein Polyeder P heißt „kleiner“ als ein Polyeder Q ($P < Q$, $Q > P$), wenn P und Q resp. aus denselben Teilpolyedern wie P' und Q' zusammengesetzt sind und P' ganz innerhalb Q' liegt.

2) Zwei Polyeder P, Q heißen „gleich“ ($P = Q$, $Q = P$), wenn weder $P < Q$ noch $P > Q$ ist.†)

Gegen die Zulässigkeit dieser Definitionen kann nicht eingewendet werden, daß man danach im allgemeinen die Gleichheit zweier Polyeder nicht durch eine endliche Anzahl von Operationen feststellen kann; vielmehr würden sie nur dann unzulässig sein, wenn gleichzeitig $P > Q$ und $P < Q$ sein könnte. Dies ist durch Einführung eines Inhaltsmaßes $I(P)$ für jedes Polyeder P zu widerlegen, welches stets positiv

*) Gött. Nachr. 1900, Math. Ann. 55 (1902) p. 465.

**) Math. Ann. 57 (1903) p. 421.

***) Grundlagen d. Geom., 2. Aufl. (1903) p. 47.

†) Die Definition der Polyedergleichheit kann auch so formuliert werden: Zwei Polyeder heißen gleich, wenn sie in bezug auf je zwei endlich-gleiche Polyeder in derselben Beziehung des größer oder kleiner stehen. Diese Definition ist dann analog derjenigen der Gleichheit zweier Irrationalzahlen: zwei Irrationalzahlen heißen gleich, wenn sie zu jeder Rationalzahl in derselben Beziehung des größer oder kleiner stehen. Demnach könnte man endlich-gleiche Polyeder als „rational-gleich“, gleiche, nicht-endlich-gleiche Polyeder als „irrational-gleich“ bezeichnen.

ist und die Eigenschaft $I(P+Q) = I(P) + I(Q)$ hat. Ein solches Inhaltsmaß ist für ein Tetraeder das Produkt aus dem Inhaltsmaß der Grundfläche und dem Inhaltsmaß der Höhe, d. h. dem Verhältnis der Höhe zur Einheitsstrecke, für ein Polyeder die Summe der Inhaltsmaße von Teiltetraedern, aus denen es besteht. Das Inhaltsmaß eines Tetraeders ist unabhängig davon, welche Seite desselben zur Grundfläche genommen wird, wie man durch Orthogonal-Projektion des Tetraeders auf eine zu einer Kante senkrechte Ebene und Anwendung von 106 erkennt. Das Rechnen mit solchen Inhaltsmaßen, Produkten von drei Streckenverhältnissen, erfolgt nach 96ff. Bei einer „transversalen“ Zerlegung (d. h. durch Ebenen einer Kante) eines Tetraeders ist offenbar das Inhaltsmaß des Ganzen gleich der Summe der Inhaltsmaße der Teile. Eine beliebige Zerlegung eines Tetraeders in Teiltetraeder läßt sich auf transversale zurückführen*), also ist bei **jeder** Zerlegung eines Tetraeders das Inhaltsmaß gleich der Summe der Inhaltsmaße der Teiltetraeder. Schließlich gibt es bei zwei verschiedenen Zerlegungen eines Polyeders in Teiltetraeder stets eine dritte Zerlegung, aus der beide durch verschiedenartige Zusammenfassung der Teiltetraeder hervorgehen.

Ist also jetzt das Polyeder P größer als das Polyeder Q, also

$$P = P', \quad Q = Q', \quad P' = Q' + R,$$

so ist auch

$$I(P) = I(Q) + I(R),$$

also

$$I(P) > I(Q).$$

Ist $P = Q$, d. h. (Def. 2) weder $P > Q$, noch $P < Q$, so ist auch weder $I(P) > I(Q)$ noch $I(P) < I(Q)$, d. h. $I(P) = I(Q)$. Demnach sind z. B. Tetraeder mit gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich, und man kann jedes Polyeder in ein inhaltgleiches Tetraeder $OABC$ mit drei rechten Winkeln bei O und zwei gegebenen Seiten OA, OB überführen.

Um auch im Nicht-Euklidischen Fall das Inhaltsmaß anzugeben, würde es genügen, im Euklidischen Raume von vier Dimensionen das Inhaltsmaß eines „sphärischen“ Tetraeders auszurechnen und sich zu überzeugen, daß dasselbe bei einer transversalen Zerlegung der Summe der Inhaltsmaße der Teiltetraeder gleich ist.**)

---

*) Vgl. Schatunovsky, Math. Ann. 57 (1903) p. 496. Veronese, Atti di R. Instituto Veneto. T. VI. VII. 1894, 1895.

**) Über die Inhaltsbestimmung im Nicht-Euklidischen Fall vgl. F. Dannmeyer, Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den Lobatschefskischen Raum (Kiel, Doktor-Dissertation 1904). Hier ist auch p. 56, 57 die ältere Literatur dieses Problems zusammengestellt.

Schlußwort.

Die vorstehende Behandlung der Theorie des Flächeninhalts und des Rauminhalts ist als Anhang zu betrachten. Die Lösung der eigentlichen, in der Einleitung bezeichneten Aufgabe des vorliegenden Buches: ein vollständiges und widerspruchsloses System von Grundsätzen und Grundbegriffen für die Geometrie aufzustellen, ist mit Art. 120 vollendet, und zwar für alle drei Geometrien auf Grund der Verknüpfungs-, reinen Anordnungs- und der Kongruenzsätze, unter Ausschluß der Existentialsätze der Anordnung, für die hyperbolische Geometrie außerdem auf Grund der Stetigkeit ohne Annahme der Kongruenzaxiome.

Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

Druckfehler.

Seite 129 Zeile 8 v. u. lies: Schor statt Schur.



B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.



Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden Werken über die wichtigsten Abschnitte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen.

Die anerkennende Beurteilung, welche der Plan, sowie die bis jetzt erschienenen Aufsätze der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften gefunden haben, die allseitige Zustimmung, welche den von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veranlafsten und herausgegebenen eingehenden Referaten über einzelne Abschnitte der Mathematik zu teil geworden ist, beweisen, wie sehr gerade jetzt, wo man die Resultate der wissenschaftlichen Arbeit eines Jahrhunderts zu überblicken bemüht ist, sich das Bedürfnis nach zusammenfassenden Darstellungen geltend macht, durch welche die mannigfachen Einzelforschungen auf den verschiedenen Gebieten mathematischen Wissens unter einheitlichen Gesichtspunkten geordnet und einem weiteren Kreise zugänglich gemacht werden.

Die erwähnten Aufsätze der Encyklopädie ebenso wie die Referate in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung beabsichtigen in diesem Sinne in knapper, für eine rasche Orientierung bestimmter Form den gegenwärtigen Inhalt einer Disciplin an gesicherten Resultaten zu geben, wie auch durch sorgfältige Litteraturangaben die historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem grofsen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiter-

schaft an dem Unternehmen entschließen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Maße zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läßt, im gleichen Maße willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird (die bereits erschienenen Bände sind mit zwei **, die unter der Presse befindlichen mit einem * bezeichnet):

P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. (Band X der Sammlung.)

M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

G. Bohlmann, Versicherungsmathematik.

G. H. Bryan, Lehrbuch der Thermodynamik.

G. Castelnuovo und **F. Enriques**, Theorie der algebraischen Flächen.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. (Band IX.)

L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [In englischer Sprache.] (Band VI.)

F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.

F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

G. Eneström (in Verbindung mit andern Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.

F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.

A. Gleichen, Optische Abbildungslehre u. Theorie der optischen Instrumente. (Band VIII.)

M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.

J. Harkness, elliptische Funktionen.

L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.

K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.

G. Jung, Geometrie der Massen.

G. Kohn, rationale Kurven.

A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen. (Band XII.)

H. Lamb, Akustik.

R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.









